Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 21/22
28.10.2021

Lineare Algebra I
2. Übungsblatt

Abgabe: Do. 04.11.2021, 10:15

Einstiegsaufgabe A. (nicht abzugeben) Bestimmen Sie alle $\in$- und $\subset$-Relationen zwischen folgenden Mengen:

$\mathbb{R}$	$\mathcal{P}(\mathbb{R})$
$\{\mathbb{R}\}$	$\{\pi, \mathbb{R}\}$
$\{\{\pi\}, \mathbb{R}\}$	$\{\pi, \{\mathbb{R}\}\}$
$\{\pi, \mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$	$\{A \in \mathbb{R} \mid A \leq \pi\}$
$\{\mathbb{R}\} \cup \mathbb{R}$	$\{x \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid \pi \in x\}$

Einstiegsaufgabe B. (nicht abzugeben) Seien A und B zwei endlichen Mengen der Mächtigkeit a bzw. b. Beweisen Sie, dass die Menge $\mathrm{Abb}(A, B)$ genau b^a Elemente hat.

Hinweis. Verwenden Sie Induktion über a.

Aufgabe 1. (5 Punkte) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, $A \subset X$ und $B \subset Y$.

(a) Zeigen Sie, dass $A \subset f^{-1}(f(A))$, und dass die Gleichung gilt wenn f injektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass $f(f^{-1}(B)) \subset B$, und dass die Gleichung gilt wenn f surjektiv ist.

(c) Finden Sie ein Beispiel von einer Abbildung $f\colon X \to Y$ und Teilmengen $A \subset X$ und $B \subset Y$, so dass $A \neq f^{-1}(f(A))$ und $f(f^{-1}(B)) \neq B$.

Aufgabe 2. (5 Punkte) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Seien $B, B' \subset Y$. Beweisen Sie die folgenden Gleichungen:

$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$$
$$f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B').$$

(b) Seien $A, A' \subset X$. Beweisen Sie die folgenden Gleichungen:

$$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$$
$$f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A').$$

(c) Finden Sie ein Beispiel von einer Abbildung $f\colon X \to Y$ und Teilmengen $A, A' \subset X$, so dass $f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A')$.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sind f und g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.

(b) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

Aufgabe 4. (2 Punkte) Ist die folgende Aussage wahr? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel:

Jede Relation, die transitiv und symmetrisch ist, ist auch reflexiv.