Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 21/22
11.11.2021

Lineare Algebra I
4. Übungsblatt

Abgabe: Do. 18.11.2021, 10:15

Einstiegsaufgabe A. (nicht abzugeben)

(a) Überprüfen Sie die Existenz von multiplikativen Inversen in den Körpern $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

(b) Bestimmen Sie alle Elemente von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, die multiplikative Inverse besitzen.

Einstiegsaufgabe B. (nicht abzugeben) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

(a) $(1 + 2i)(1 - 3i)$

(b) $(1 - 2i)^3$

(c) $\dfrac{2 - 9i}{1 - 2i}$

(d) $\dfrac{(1 + i)^4}{(1 - i)^2}$

Aufgabe 1. (4 Punkte) Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die folgende Relation $\sim_f$ auf X ist eine Äquivalenzrelation:

$$x \sim_f x' \iff f(x) = f(x').$$

(b) Es gibt genau eine Abbildung $u : X/{\sim_f} \to f(X)$, so dass folgendes Quadrat kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/{\sim_f} \arrow[r, dashed, "u"] & f(X), \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

d.h., $f = i \circ u \circ q$, wobei q die Quotientenabbildung und i die Inklusionsabbildung sind. Außerdem ist u bijektiv.

Hinweis. Verwenden Sie die universelle Eigenschaft der Quotientenmenge.

Aufgabe 2. (2 Punkte) Sei K ein Körper und sei $x \in K$. Eine *Quadratwurzel* von x ist ein Element $a \in K$ mit $a^2 = x$. Zeigen Sie, dass x höchstens zwei Quadratwurzeln besitzt.

Hinweis. Falls a und b Quadratwurzeln von x sind, zeigen Sie, dass $b = \pm a$.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Sei K ein Körper. Man betrachte die folgenden Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf $K^2 = K \times K$:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

(a) Zeigen Sie, dass $(K^2, +, \cdot)$ genau dann ein Körper ist, wenn -1 in K keine Quadratwurzel besitzt.

Hinweis. $(K^2, +, \cdot)$ ist immer ein kommutativer Ring. Zur Implikation $\Rightarrow$, zeigen Sie: Falls $i \in K$ eine Quadratwurzel von -1 ist, dann hat $(1, i) \in K^2$ kein multiplikatives Inverses.

(b) Schließen Sie daraus, dass ein Körper mit genau 9 Elementen existiert.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Seien $(G, \cdot)$ und $(H, \cdot)$ Gruppen. Eine Abbildung $f\colon G \to H$ heißt *Gruppenhomomorphismus*, wenn für alle $x, y \in G$ gilt $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$.

Zeigen Sie, dass für einen Gruppenhomomorphismus $f\colon G \to H$ gelten:

(a) $f(1) = 1$,

(b) $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ für alle $x \in G$,

(c) f ist genau dann injektiv, wenn $f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$.

Man betrachte nun die Gruppen $(S_3, \circ)$ und $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$.

(d) Definieren Sie einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $f\colon S_3 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.