Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 21/22
18.11.2021

Lineare Algebra I
5. Übungsblatt

Abgabe: Do. 25.11.2021, 10:15

Einstiegsaufgabe A. (nicht abzugeben) Sei p eine Primzahl. Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind (die Antwort kann von p abhängen!). Die Verknüpfung ist jeweils die Addition.

(a) $f_1 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x + 1$

(b) $f_2 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 4x$

(c) $f_3 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $x \mapsto [x^p]$

(d) $f_4 \colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $x \mapsto x^3 + 2x$

Einstiegsaufgabe B. (nicht abzugeben) Sei V ein K-Vektorraum und seien $U, W \subset V$ Untervektorräume.

(a) Falls weder $U \subset W$ noch $W \subset U$ gelten, zeigen Sie, dass $U \cup W$ kein Untervektorraum von V ist.

(b) Sei
$$U + W := \{u + w \mid u \in U \text{ und } w \in W\} \subset V.$$
Zeigen Sie, dass $U + W$ ein Untervektorraum von V ist, und zwar dass $U + W = \operatorname{Span}_K(U \cup W)$.

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei X eine Menge. Man definiert die folgende Verknüpfung $+$ auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$:
$$A + B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

(a) Beweisen Sie, dass $(\mathcal{P}(X), +)$ eine abelsche Gruppe ist.

(b) Definieren Sie eine Abbildung
$$\cdot \colon \mathbb{F}_2 \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X),$$
so dass $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$ ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Entscheiden Sie jeweils, welche der folgenden Mengen Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ sind. Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 2x_3\}$

(b) $U_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq x_2\}$

(c) $U_3 = f^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R})$, wobei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_3)$

(d) $U_4 = g^{-1}(\mathbb{R})$, wobei $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$, $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + i(x_2 + x_3)$

Aufgabe 3. (4 Punkte) Man betrachte den folgenden Untervektorraum von $\mathbb{C}^2$:

$$U = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 + iz_2 = 0\} \subset \mathbb{C}^2.$$

(a) Finden Sie einen Vektor $v \in \mathbb{C}^2$, so dass $U = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\{v\})$.

(b) Finden Sie Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2$, so dass $U = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{v_1, v_2\})$.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Eine *Ursprungsgerade* in einer K-Vektorraum V ist bekanntlich ein Untervektorraum der Gestalt $K \cdot v$ mit einem Vektor $v \in V \setminus \{0\}$.

(a) Sei V ein K-Vektorraum und $\sim$ die folgende Relation auf $V \setminus \{0\}$:

$$v \sim w \iff \text{es existiert } \lambda \in K \setminus \{0\} \text{ mit } \lambda \cdot v = w.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $V \setminus \{0\}$ ist, und beschreiben Sie die zugehörigen Äquivalenzklassen.

(b) Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Ursprungsgeraden im $\mathbb{F}_p$-Vektorraum $\mathbb{F}_p^n$ ist $\frac{p^n-1}{p-1}$.

Hinweis. Betrachten Sie die der Äquivalenzrelation $\sim$ zugeordnete Partition von $\mathbb{F}_p^n \setminus \{0\}$.

Bemerkung. Die Quotientenmenge $\mathbb{P}^n(K) := (K^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ heißt der *projektiver Raum* der Dimension n über K.