Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 21/22
25.11.2021

Lineare Algebra I
6. Übungsblatt

Abgabe: Do. 02.12.2021, 10:15

Einstiegsaufgabe A. (nicht abzugeben) Sei V ein K-Vektorraum und seien $v, w \in V$. Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$(v, w) \text{ ist eine Basis von } V \quad \Longleftrightarrow \quad (v + w, w) \text{ ist eine Basis von } V$$

Einstiegsaufgabe B. (nicht abzugeben) Sei p eine Primzahl. Bestimmen Sie die Anzahl der Basen (v_1, v_2) des $\mathbb{F}_p$-Vektorraums $\mathbb{F}_p^2$.

Aufgabe 1. (1+1+1+1 Punkte) Entscheiden Sie, ob die folgenden Familien von Vektoren linear unabhängig sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

(a) $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_1 + e_3)$ in K^3 mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

(b) $((1, 1, 2), (1, 2, 0), (0, 1, 1))$ in $\mathbb{R}^3$ $(K = \mathbb{R})$.

(c) $((1, 1, 2), (1, 2, 0), (0, 1, 1))$ in $\mathbb{F}_3^3$ $(K = \mathbb{F}_3)$.

(d) $(1, \sqrt{2})$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2. (2+2 Punkte) Finden Sie Basen der folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$:

(a) $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

(b) $U_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0\}$

Aufgabe 3. (2 Punkte) Seien $x, y \in K^2$. Zeigen Sie, dass (x, y) genau dann eine Basis ist, wenn $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$.

Aufgabe 4. (1+4+1 Punkte) Eine Abbildung $f \colon K \to K$ heißt *Polynomfunktion*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und Skalare $a_0, \ldots, a_n \in K$ gibt, so dass

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$$

für alle $x \in K$. Dabei verstehen wir $x^0 = 1$ für alle $x \in K$, auch für $x = 0$; es gilt also $f(0) = a_0$. Sei

$$\mathrm{Poly}(K, K) \subset \mathrm{Abb}(K, K)$$

die Teilmenge aller Polynomfunktionen.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Poly}(K, K)$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(K, K)$ ist.

Für $i \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$f_i \colon K \to K, \quad x \mapsto x^i.$$

(b) Falls $K = \mathbb{R}$, zeigen Sie, dass $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Basis von $\operatorname{Poly}(K, K)$ ist.

Hinweis. Um die lineare Unabhängigkeit zu beweisen, können Sie die gewöhnliche Ableitung f' einer reellen Polynomfunktion f benutzen.

(c) Finden Sie ein Gegenbeispiel zu der Aussage (b) für beliebiges K, d.h., finden Sie einen Körper K, so dass die Familie $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ keine Basis ist.

Hinweis. Probieren Sie $K = \mathbb{F}_2$.

Bemerkung. Wir werden später beweisen, dass die Familie $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ genau dann eine Basis von $\operatorname{Poly}(K, K)$ ist, wenn K unendlich ist.