Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 21/22
02.12.2021

Lineare Algebra I
7. Übungsblatt

Abgabe: Do. 09.12.2021, 10:15

Einstiegsaufgabe A. (nicht abzugeben) Wir betrachten die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass (v_1, v_2) eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist, und bestimmen Sie $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, so dass

$$e_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2,$$
$$e_2 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2.$$

Einstiegsaufgabe B. (nicht abzugeben) Für die folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$, bestimmen Sie jeweils einen komplementären Untervektorraum:

(a) $U_1 = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e_1\}$

(b) $U_2 = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_3\}$

(c) $U_3 = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e_1 + e_2\}$

(d) $U_4 = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e_1 + e_2, e_3\}$

Aufgabe 1. (2 Punkte) Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$. Entscheiden Sie mit vollständigem Beweis, für welches $z \in \mathbb{C}$ die Familie (z, z^2) eine Basis von $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 2. (2+2 Punkte)

(a) Seien $U, V \subset K^5$ Untervektorräume mit $\dim_K(U) = 3$ und $\dim_K(U \cap V) = 1$. Was sind die Möglichkeiten für $\dim_K(V)$? Geben Sie ein Beispiel von U und V in jedem Fall.

(b) Zeigen Sie, dass es kein Tripel (U, V, W) von Untervektorräumen von K^5 existiert, so dass $\dim_K(U) = 4$, $\dim_K(U \cap V) = 3$, $\dim_K(U \cap W) = 3$ und $\dim_K(V \cap W) = 1$.

Aufgabe 3. (2+2 Punkte) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Komposition zweier linearen Abbildung ist wieder eine lineare Abbildung.

(b) Die Summe zweier linearen Abbildung ist wieder eine lineare Abbildung.

Aufgabe 4. (2+2+2 Punkte) Wir betrachten den Untervektorraum

$$U = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie einen komplementären Untervektorraum zu U.

(b) Definieren Sie eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f|_U = 0$ aber $f \neq 0$.

(c) Definieren Sie eine lineare Abbildung $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $g(\mathbb{R}^3) = U$ und $g \circ g = g$.

Hinweis. Um f und g zu definieren, können Sie die universelle Eigenschaft von Basen verwenden.