Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 21/22
09.12.2021

Lineare Algebra I
8. Übungsblatt

Abgabe: Do. 16.12.2021, 10:15

Einstiegsaufgabe A. (nicht abzugeben) Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Zeigen Sie:

$$\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} V.$$

Einstiegsaufgabe B. (nicht abzugeben) Sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Auswertungsabbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_K(K, V) &\to V, \\ f &\mapsto f(1), \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 1. (2+2 Punkte) Finden Sie Basen des Kerns und des Bildes folgender K-linearen Abbildungen:

(a) $K = \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 - 3x_3 \end{pmatrix}.$$

(b) $K = \mathbb{F}_3$, $g\colon \mathbb{F}_3^3 \to \mathbb{F}_3^2$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Hinweis. Ihre Antwort sollte mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen vereinbar sein!

Aufgabe 2. (2+2 Punkte) Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) (universelle Eigenschaft der direkten Summe) Seien U, W Vektorräume über K und

$$\begin{aligned} \iota_1\colon U &\to U \oplus W, \\ u &\mapsto (u, 0), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \iota_2\colon W &\to U \oplus W, \\ w &\mapsto (0, w). \end{aligned}$$

Zu jedem K-Vektorraum V und jeden linearen Abbildungen $f\colon U \to V$ und $g\colon W \to V$ gibt es genau eine lineare Abbildung $h\colon U \oplus W \to V$ mit $h \circ \iota_1 = f$ und $h \circ \iota_2 = g$. Anders gesagt ist die folgende Abbildung bijektiv:

$$\mathrm{Hom}_K(U \oplus W, V) \to \mathrm{Hom}_K(U, V) \times \mathrm{Hom}_K(W, V), \quad h \mapsto (h \circ \iota_1, h \circ \iota_2).$$

(b) Sei nun V ein K-Vektorraum und $U, W \subset V$ Untervektorräume. Seien $i_U \colon U \hookrightarrow V$ und $i_W \colon W \hookrightarrow V$ die Inklusionsabbildungen. Dann sind U und W genau dann komplementär in V, wenn die aus (a) induzierte Abbildung $U \oplus W \to V$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei V ein K-Vektorraum und $U, W \subset V$ zwei Untervektorräume. Beweisen Sie den folgenden Satz:

Satz (erster Isomorphiesatz)**.** *Die Inklusionsabbildung $i \colon U \hookrightarrow U + W$ induziert einen Isomorphismus*

$$\begin{aligned} U/(U \cap W) &\xrightarrow{\sim} (U+W)/W, \\ u + (U \cap W) &\mapsto u + W. \end{aligned}$$

Bemerkung. Wenn U und W komplementär sind, erhalten wir insbesondere einen Isomorphismus $U \xrightarrow{\sim} V/W$, $u \mapsto u + W$.

Aufgabe 4. (2+2 Punkte) Sei $\mathrm{Poly}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynomfunktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (siehe Aufgabe 4 vom Übungsblatt 6) und sei $\mathrm{Poly}_{\leq 2}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der von $\{f_0, f_1, f_2\}$ erzeugte Untervektortaum, d.h., bestehend aus Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2.

(a) Bestimmen Sie die duale Basis (f_0^*, f_1^*, f_2^*) zu (f_0, f_1, f_2).

(b) Sei $\alpha \colon \mathrm{Poly}_{\leq 2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ die wie folgt definierte Abbildung:

$$\alpha(f) = f'(\sqrt{2}).$$

Zeigen Sie, dass α eine Linearform auf $\mathrm{Poly}_{\leq 2}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist, und schreiben Sie α als Linearkombination der dualen Basis (f_0^*, f_1^*, f_2^*).