Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 21/22
16.12.2021

Lineare Algebra I
9. Übungsblatt

Abgabe: Do. 23.12.2021, 10:15

Einstiegsaufgabe A. (nicht abzugeben) Berechnen Sie alle möglichen Produkte $A \cdot B$ mit A, B aus den folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Einstiegsaufgabe B. (nicht abzugeben) Sei $D\colon \mathrm{Poly}_{\leq 2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathrm{Poly}_{\leq 1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die lineare Abbildung $f \mapsto f'$ (siehe Aufgabe 4 vom Übungsblatt 8). Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[D]_C^B \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ für die folgenden Basen B und C, wobei $f_i(x) = x^i$:

(a) $B = (f_0, f_1, f_2)$ und $C = (f_0, f_1)$

(b) $B = (f_1, f_2, f_0)$ und $C = (f_0, 2f_1)$

Aufgabe 1. (2 Punkte) Man betrachte die folgenden Linearformen auf $\mathbb{R}^3$:

$$\mu\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + 2x_2,$$

$$\nu\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3,$$

$$\xi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto 3x_1 + x_2 + 2x_3.$$

Bestimmen Sie, ob (μ, ν, ξ) eine Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$ ist.

Aufgabe 2. (2 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Die zu einer Permutation $\sigma \in S_n$ zugehörige *Permutationsmatrix* über K ist die $n \times n$-Matrix

$$P_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)})_{i,j}.$$

Zeigen Sie, dass P_σ invertierbar ist und dass die Abbildung

$$S_n \to \mathrm{GL}_n(K), \quad \sigma \mapsto P_\sigma,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 3. (2+2+2+2 Punkte) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel.

(a) Es gibt keine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, $f \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, und $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

(b) Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-linear und ist $f \circ f = 0$, so ist f gleich der Nullabbildung.

(c) Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine injektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, so existiert eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

(d) Zu jeder $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $g \circ g = f$.

Aufgabe 4. (2+2 Punkte) Die *Spur* einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(K)$ ist

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \in K.$$

(a) (*Spureigenschaft*) Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{m\times n}(K)$ und $B \in M_{n\times m}(K)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{tr}(A \cdot B) = \mathrm{tr}(B \cdot A).$$

(b) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Man definiert die *Spur* von f durch

$$\mathrm{tr}(f) := \mathrm{tr}([f]_B^B),$$

wobei B eine Basis von V ist. Zeigen Sie, dass $\mathrm{tr}(f)$ wohldefiniert ist, d.h., dass $\mathrm{tr}([f]_B^B)$ nicht von der Wahl der Basis B abhängt.

Bemerkung. Die Spureigenschaft impliziert, dass für alle Matrizen $A_1, \ldots, A_k \in M_n(K)$ gilt $\mathrm{tr}(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k) = \mathrm{tr}(A_k \cdot A_1 \cdot \ldots \cdot A_{k-1})$. Im Gegensatz zu der Determinante (die später in der Vorlesung definiert wird) ist es aber *nicht* der Fall, dass $\mathrm{tr}(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k) = \mathrm{tr}(A_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot A_{\sigma(k)})$ für alle $\sigma \in S_k$.