Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 22/23
21.10.2022

Algebra
Präsenzübungsblatt
(keine Abgabe)

Aufgabe 1. (Diedergruppen) Sei $n \geq 3$. Die *Diedergruppe* D_n ist die Gruppe der Isometrien eines regulären n-Ecks E_n. Sie enthält genau $2n$ Elemente: n Drehungen (einschließlich der Identität) und n Spiegelungen.

(a) Skizzieren Sie ein reguläres Dreieck, Viereck und Fünfeck, und erklären Sie damit, was genau die Elemente von D_3, D_4 und D_5 sind.

(b) Sei σ_L die Spiegelung an der Geraden L in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

- Ist ρ eine Drehung um einen Punkt von L, so ist $\sigma_L \circ \rho$ eine Spiegelung an einer gewissen Geraden L'. Zudem gilt $\sigma_L \circ \rho = \rho^{-1} \circ \sigma_L$.
- Sind L und L' zwei Geraden mit $L \cap L' = \{P\}$, so ist $\sigma_{L'} \circ \sigma_L$ eine Drehung um den Punkt P.

(c) Jede Isometrie $\varphi \in D_n$ schränkt sich zu einer Permutation der n Ecken von E_n ein. Zeigen Sie, dass ein injektiver Gruppenhomomorphismus

$$f_n \colon D_n \hookrightarrow S_n$$

dadurch definiert wird (nachdem man die n Ecken mit den Zahlen $1, \ldots, n$ bezeichnet), der Drehungen auf gerade Permutationen und Spiegelungen auf ungerade Permutationen abbildet.

(d) Bestimmen Sie explizit das Bild von f_n, wenn $n = 3, 4, 5$.

Aufgabe 2. (Permutationen und Konjugation) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $\sigma \in S_n$ ein Zyklus der Länge k und sei $\tau \in S_n$ beliebig. Dann ist $\tau\sigma\tau^{-1}$ wieder ein Zyklus der Länge k.

(b) Seien umgekehrt $\sigma, \sigma' \in S_n$ zwei Zyklen derselben Länge k. Dann gibt es ein $\tau \in S_n$, so dass $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$.

Der *Typ* einer Permutation $\sigma \in S_n$ ist das Tupel $(a_2, \ldots, a_n)$, wobei a_k die Anzahl der Zyklen der Länge k in der Zyklenzerlegung von σ ist (es gilt also $\sum_{i=2}^{n} i a_i \leq n$).

Zur Erinnerung heißen zwei Elemente g, g' einer Gruppe G *konjugiert*, wenn es ein Element $h \in G$ gibt mit $g' = hgh^{-1}$.

(c) Schließen Sie aus (a) und (b), dass zwei Permutationen $\sigma, \sigma' \in S_n$ genau dann konjugiert sind, wenn sie denselben Typ haben.

(d) Wie viele Typen von Permutationen in S_n gibt es, wenn $n = 2, 3, 4, 5$?

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass jede Gruppe G mit $|G| \leq 4$ abelsch ist.