Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 22/23
21.10.2022

Algebra
1. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 28.10.2022, 10:15

Aufgabe 1. (2+2 Punkte) Sei $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist K eine Untegruppe von H, so ist $f^{-1}(K)$ eine Untergruppe von G.

(b) Ist K eine Untergruppe von G, so ist $f(K)$ eine Untergruppe von H.

Aufgabe 2. (2+2 Punkte) Sei p eine Primzahl und sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ genau

$$\prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i)$$

Elemente hat.

(b) Wie viele Elemente gibt es in $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p)$?

Hinweis. Jede Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(R)$ kann eindeutig als

$$A = \mathrm{diag}(\lambda, 1, \dots, 1) \cdot A'$$

geschrieben werden, mit $\lambda \in R^\times$ und $A' \in \mathrm{SL}_n(R)$.

Aufgabe 3. (2+2 Punkte) Bestimmen Sie jeweils die Isometriegruppe der gegebenen Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ (mit der euklidischen Metrik), indem Sie einen Isomorphismus mit einer bekannten Gruppe beschreiben:

(a) Ein gleichschenkliges aber nicht reguläres Dreieck.

(b) Ein Rechteck, das kein Quadrat ist.

Aufgabe 4. (2+2 Punkte) Bestimmen Sie alle Untergruppen von S_3 und von D_4.