Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 22/23
23.12.2022

Algebra
10. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 13.01.2023, 10:15

Aufgabe 1. (1+1 Punkte) Bestimmen Sie jeweils den letzten Ziffer der gegebenen Zahl im Zehnersystem:

(a) 2023^{2023}

(b) $2023^{2023^{2023}}$

Hinweis. Nach dem chinesischen Restsatz genügt es die Restklassen modulo 2 und 5 zu bestimmen. Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt $x^{q\cdot\varphi(n)+r} \equiv x^r \pmod{n}$, sofern $\mathrm{ggT}(x, n) = 1$.

Aufgabe 2. (2+2+3+3 Punkte) Bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom $m_a \in \mathbb{Q}[X]$ und die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(a) \mid \mathbb{Q})$:

(a) (irrationale Quadratwurzel) $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ mit $a^2 \in \mathbb{Q}$.

(b) (reelle irrationale Kubikwurzel) $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $a^3 \in \mathbb{Q}$.

(c) $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(a)$ (was ist a^{-1}?), so dass $\mathbb{Q}(a) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Schließen Sie aus der Multiplikativität des Grades, dass $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = 4$.

(d) $a = i\sqrt[3]{2}$.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass $i, \sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}(a)$, so dass $\mathbb{Q}(a) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i)$. Schließen Sie aus der Multiplikativität des Grades, dass $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = 6$. Zur Bestimmung der Galoisgruppe, zeigen Sie, dass $\pm a$ die einzigen Nullstellen von m_a in $\mathbb{Q}(a)$ sind (sonst wäre $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(a)$ und damit $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(a)$; warum ist das nicht möglich?).

Aufgabe 3. (2+1+1 Punkte) Sei K ein Körper der Primcharakteristik p. Die Abbildung

$$\varphi\colon K \to K, \quad x \mapsto x^p,$$

heißt der *Frobenius-Endomorphismus* von K. Zeigen Sie:

(a) φ ist ein Ringhomomorphismus.

(b) Ist K endlich, so ist φ bijektiv.

(c) Ist $K = K_0(X)$ mit einem Teilkörper $K_0 \subset K$, so ist φ nicht surjektiv.