Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 22/23
13.01.2022

Algebra
11. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 20.01.2023, 10:15

Aufgabe 1. (2 Punkte) Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung und sei $a \in L$ algebraisch über K, so dass $[K(a) : K]$ ungerade ist. Zeigen Sie, dass $K(a) = K(a^2)$.

Aufgabe 2. (1+2+3+3 Punkte) Berechnen Sie jeweils die Galoisgruppe des gegebenen Polynoms $f \in \mathbb{Q}[X]$, zusammen mit ihrer Operation auf den Nullstellen von f:

(a) $f = X^4 - 1$

(b) $f = X^5 - 1$

(c) $f = X^4 + 1$

(d) $f = X^4 - 6$

Aufgabe 3. (1+2+2 Punkte) Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung, sei $G < \mathrm{Gal}(L \mid K)$ eine endliche Untergruppe und sei

$$L^G = \{x \in L \mid \text{für alle } \sigma \in G \text{ gilt } \sigma(x) = x\}$$

die Fixpunktmenge der Operation von G auf L.

(a) Zeigen Sie, dass L^G ein Zwischenkörper von $L \mid K$ ist.

Sei nun $a \in L$ beliebig und sei $B \subset L$ die Bahn von a unter der Operation von G.

(b) Zeigen Sie, dass das Polynom

$$f = \prod_{b \in B} (X - b) \in L[X]$$

bereits in $L^G[X]$ liegt.

(c) Zeigen Sie, dass f das Minimalpolynom von a über L^G ist. Schließen Sie daraus, dass $[L^G(a) : L^G]$ die Mächtigkeit von G teilt.