Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 22/23
20.01.2022

Algebra
12. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 27.01.2023, 10:15

Aufgabe 1. (1+1+1+1 Punkte) Bestimmen Sie jeweils, ob die gegebene Aussage wahr oder falsch ist. Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) Sei $f \in \mathbb{F}_p[X]$ irreduzibel vom Grad d. Dann gilt $f | X^{p^d} - X$.

(b) Seien K und L Körper. Ist $\operatorname{char}(K) \neq \operatorname{char}(L)$, so gibt es keinen Körperhomomorphismus $K \to L$.

(c) Die Nullstellen von $X^4 - X$ in $\mathbb{F}_8$ bilden einen Körper mit 4 Elementen.

(d) Sei $f \in K[X]$ monisch und irreduzibel und sei $L \mid K$ ein Zerfällungskörper von f. Dann gilt $\deg(f) | [L : K]$.

Aufgabe 2. (1+1 Punkte) Finden Sie jeweils eine algebraische Zahl $b \in \bar{\mathbb{Q}}$, damit die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(a, b) \mid \mathbb{Q}$ normal ist:

(a) $a = \sqrt[5]{2}$

(b) $a = \sqrt{1 + \sqrt{5}}$

Aufgabe 3. (2+2 Punkte) Sei $n \geq 2$ und sei K ein Körper, in dem eine primitive n-te Einheitswurzel ζ_n existiert (d.h., $\zeta_n^n = 1$ aber $\zeta_n^m \neq 1$ für $0 < m < n$). Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung und sei $a \in L$ mit $a^n \in K$. Zeigen Sie:

(a) Die Körpererweiterung $K(a) \mid K$ ist normal.

(b) Die Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(K(a) \mid K)$ ist zyklisch.

Aufgabe 4. (2+2+2 Punkte) Bestimmen Sie jeweils den Zerfällungskörper und die Galoisgruppe des Polynoms f über K:

(a) $K = \mathbb{F}_5$, $f = X^3 - 2$

(b) $K = \mathbb{F}_3$, $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$

(c) $K = \mathbb{F}_{49}$, $f = X^3 - 2$