Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 22/23
27.01.2022

Algebra
13. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 03.02.2023, 10:15

Aufgabe 1. (2 Punkte) Seien $L \mid M \mid K$ algebraische Körpererweiterungen. Zeigen Sie, dass $L \mid K$ genau dann separabel ist, wenn beide $L \mid M$ und $M \mid K$ separabel sind.

Hinweis. Ist $a \in L$, so sind $K(a) \mid M \cap K(a) \mid K$ endliche Körpererweiterungen.

Aufgabe 2. (2+2 Punkte) Ein Körper K heißt *vollkommen* (oder *perfekt*), wenn jedes irreduzible Polynom in $K[X]$ separabel ist. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen, wenn $\mathrm{char}(K) = p > 0$:

(a) K ist vollkommen.

(b) Der Frobenius-Endomorphismus $\varphi\colon K \to K$ ist bijektiv.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst: Ist $\varphi\colon K \to K$ bijektiv, so ist $\varphi\colon L \to L$ bijektiv für alle endlichen Körpererweiterungen $L \mid K$.

Aufgabe 3. (2 Punkte) Bestimmen Sie ein primitives Element der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) \mid \mathbb{Q}$.

Hinweis. Verwenden Sie den Beweis vom Satz vom primitiven Element.

Aufgabe 4. (3+3 Punkte) Sei $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von $X^4 - 2$.

(a) Bestimmen Sie die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L \mid \mathbb{Q})$.

Hinweis. D_4.

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen $H < \mathrm{Gal}(L \mid \mathbb{Q})$ und die zugehörigen Fixkörper L^H. Welche Zwischenkörper von $L \mid \mathbb{Q}$ sind normal über $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 5. (2 Punkte) Sei $L \mid K$ eine Galoiserweiterung vom Grad 15 und sei M ein Zwischenkörper von $L \mid K$. Zeigen Sie, dass $M \mid K$ eine Galoiserweiterung ist.

Hinweis. Sylow-Sätze.