Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 22/23
03.02.2022

Algebra
14. Übungsblatt
(keine Abgabe)

Aufgabe 1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $f \in K[X]$ ein monisches Polynom vom Grad d mit Zerfällungskörper $L \mid K$. Dann gilt $[L : K] \leq d!$.

(b) Ist $L \mid \mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung mit $L \subset \mathbb{C}$, so definiert die komplexe Konjugation einen Automorphismus von $L \mid \mathbb{Q}$.

(c) Sei f ein monisches Polynom über $\mathbb{Q}$ mit $f(i) = 0$, dessen Galoisgruppe < 120 Elemente hat. Dann ist f durch Radikale auflösbar.

Hinweis. Sie dürfen annehmen, dass alle Gruppen mit < 60 Elementen auflösbar sind.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie jeweils alle Zwischenkörper von $L \mid \mathbb{Q}$:

(a) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

(b) $L = \mathbb{Q}(\zeta_8)$

(c) $L = \mathbb{Q}(\zeta_9)$

Aufgabe 3. Konstruieren Sie jeweils eine endliche Galoiserweiterung $L \mid \mathbb{Q}$, deren Galoisgruppe zur gegebenen abelschen Gruppe isomorph ist:

(a) $C_2 \times C_2$

(b) C_5

(c) $C_3 \times C_3$

Hinweis. Es gilt $\varphi(7) = \varphi(9) = 6$.

Aufgabe 4. Sei $c \in \mathbb{Q}$ und sei $f = X^5 + 20X^2 + c$.

(a) Zeigen Sie, dass f höchstens drei reelle Nullstellen hat.

Hinweis. Kurvendiskussion.

(b) Bestimmen Sie alle Werte von c, so dass das Eisensteinsche Kriterium auf f anwendbar ist.

(c) Schließen Sie daraus: Es gibt unendlich viele $c \in \mathbb{Q}$, so dass f nicht durch Radikale auflösbar ist.

Aufgabe 5. Sei $n \geq 3$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\zeta_n) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\cos(2\pi/n))$.

Hinweis. $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n)) \mid \mathbb{Q}$ ist eine Galoiserweiterung vom Grad $\varphi(n)/2$, und es gibt einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n) \mid \mathbb{Q}) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n)) \mid \mathbb{Q}), \quad \sigma \mapsto \sigma|_{\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n))}.$$

Nach dem Beweis des Satzes vom primitiven Element, genügt es zu zeigen:

$$\left|\{\sigma(\cos(2\pi/n)) \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n) \mid \mathbb{Q})\}\right| = \varphi(n)/2.$$

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt[8]{2}, i) \mid \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ eine Galoiserweiterung ist, deren Galoisgruppe zur Quaternionengruppe Q_8 isomorph ist.