Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 22/23
28.10.2022

Algebra
2. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 04.11.2022, 10:15

Aufgabe 1. (2 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Zeigen Sie, dass die zwei Zyklen

$$(1\,2) \quad \text{und} \quad (1\,2\,\cdots\,n)$$

ein Erzeugendensystem von S_n bilden.

Aufgabe 2. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die folgenden drei Matrizen ein Erzeugendensystem von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ bilden:

$$V_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{12}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis. Jede Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ ist bekanntlich ein Produkt von Elementarmatrizen (nach der Smith-Normalformtheorie, da $\mathbb{Z}$ ein euklidischer Ring ist). Es genügt also zu zeigen, dass alle Elementarmatrizen als Wörter in den obigen drei Matrizen geschrieben werden können.

Aufgabe 3. (2+2 Punkte) Sei $f \colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Bestimmen Sie jeweils, ob die gegebene Aussage wahr oder falsch ist, durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel:

(a) Für jede Teilmenge $S \subset G$ gilt $f(\langle S \rangle) = \langle f(S) \rangle$.

(b) Für jede Teilmenge $T \subset H$ gilt $f^{-1}(\langle T \rangle) = \langle f^{-1}(T) \rangle$.

Aufgabe 4. (2 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$. Finden Sie einen metrischen Raum (X, d), dessen Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(X, d)$ zu S_n isomorph ist.

Hinweis. Wenn $n = 3$ kann man ein reguläres Dreieck $X \subset \mathbb{R}^2$ nehmen, denn $D_3 \cong S_3$. Im Allgemeinen gibt es ein ähnliches X, das Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$ ist.