Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 22/23
04.11.2022

Algebra
3. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 11.11.2022, 10:15

Aufgabe 1. (2+2 Punkte) Bestimmen Sie jeweils alle Normalteiler der Gruppe G und die zugehörigen Quotientengruppen:

(a) $G = S_3$.

(b) $G = D_4$.

Aufgabe 2. (1+1 Punkte) Sei G eine Gruppe. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $H < G$ eine Untergruppe vom Index 2, so ist H ein Normalteiler in G.

(b) Sei $x \in G$ ein Element der Ordnung 2. Genau dann ist $\langle x \rangle$ ein Normalteiler in G, wenn für alle $g \in G$ gilt $gx = xg$.

Aufgabe 3. (1+2+2 Punkte) Sei

$$V = \{\mathrm{id}, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\} \subset S_4.$$

(a) Zeigen Sie, dass V ein Normalteiler in S_4 ist, der zu $C_2 \times C_2$ isomorph ist.

Bemerkung. Die Gruppe $C_2 \times C_2$ ist die kleinste nicht-zyklische Gruppe und heißt die *Kleinsche Vierergruppe.*

(b) Konstruieren Sie einen Isomorphismus $S_4/V \xrightarrow{\sim} S_3$.

Hinweis. Sei P die Menge der Partitionen von $\{1, 2, 3, 4\}$ in zwei zweielementige Teilmengen. Dann gilt $|P| = 3$ und jede Permutation $\sigma \in S_4$ induziert eine Permutation von P.

(c) Zeigen Sie, dass V der einzige Normalteiler in S_4 mit 4 Elementen ist.

Hinweis. Ist $N \lhd S_4$ ein Normalteiler, so ist sein Bild unter dem surjektiven Homomorphismus $S_4 \to S_3$ aus (b) ein Normalteiler in S_3.

Aufgabe 4. (1+1+2+1) Sei G eine Gruppe. Zur Erinnerung definiert jedes Element $g \in G$ einen Automorphismus

$$c_g \colon G \xrightarrow{\sim} G, \quad x \mapsto gxg^{-1}.$$

Ein Automorphismus von G der Form c_g heißt *innerer Automorphismus.* Sei $\mathrm{Inn}(G) \subset \mathrm{Aut}(G)$ die Teilmenge der inneren Automorphismen. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Inn}(G)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(G)$, die zu $G/Z(G)$ isomorph ist, wobei

$$Z(G) = \{g \in G \mid \text{für alle } h \in G \text{ gilt } gh = hg\}$$

das *Zentrum* von G ist.

(b) $\mathrm{Inn}(G)$ ist ein Normalteiler in $\mathrm{Aut}(G)$.

Die Elemente der Quotientengruppe

$$\mathrm{Out}(G) := \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$$

heißen *äußere Automorphismen* von G.

(c) Zeigen Sie: Ist $\mathrm{Inn}(G)$ zyklisch, so ist G abelsch.

(d) Bestimmen Sie $Z(G)$ und $\mathrm{Inn}(G)$ für $G = S_3$ und $G = D_4$.