Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 22/23
11.11.2022

Algebra
4. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 18.11.2022, 10:15

Aufgabe 1. (2+2+2 Punkte) Bestimmen Sie jeweils, ob die gegebene Aussage wahr oder falsch ist. Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel:

(a) Sei $\{0\} \to A \to B \to C \to \{0\}$ eine spaltende kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Dann gilt $B \cong A \times C$.

(b) Sei G eine Gruppe, sei X eine G-Menge und seien $x, y \in X$ mit $Gx = Gy$. Dann gilt $G_x = G_y$.

(c) Eine Gruppe G mit 55 Elementen operiert auf einer Menge X mit 19 Elementen. Dann hat die Operation von G auf X mindestens drei Fixpunkte, d.h., es gilt $|X^G| \geq 3$.

Aufgabe 2. (2+1 Punkte)

(a) Sei G eine Gruppe, $H < G$ eine Untergruppe und $N \lhd G$ ein Normalteiler, so dass $H \cap N = \{e\}$ und $HN = G$. Zeigen Sie, dass dann G zu einem semidirekten Produkt $N \rtimes_\varphi H$ isomorph ist.

In dieser Situation sagt man, dass G das *innere* semidirekte Produkt von N und H ist.

(b) Schließen Sie aus (a), dass $S_4 \cong (C_2 \times C_2) \rtimes_\varphi S_3$.

Hinweis. Siehe Aufgabe 3 vom Blatt 3.

Aufgabe 3. (2+1+2 Punkte) Sei K ein Körper und sei $\mathbb{P}^1(K)$ die Menge aller eindimensionalen Untervektorräume von K^2. Diese Menge heißt die *projektive Gerade* über K.

(a) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_2(K) \times \mathbb{P}^1(K) &\to \mathbb{P}^1(K), \\ (A, L) &\mapsto A \cdot L = \{A \cdot x \mid x \in L\}, \end{aligned}$$

eine transitive Operation der Gruppe $\mathrm{GL}_2(K)$ auf $\mathbb{P}^1(K)$ ist.

(b) Bestimmen Sie den Stabilisator $\mathrm{GL}_2(K)_{Ke_1}$ der Geraden Ke_1.

(c) Konstruieren Sie einen Isomorphismus $\mathrm{GL}_2(K)_{Ke_1} \cong K \rtimes_\varphi (K^\times \times K^\times)$.

Bemerkung. Diese Aussagen verallgemeinern sich wie folgt für $n \geq 1$. Der n-dimensionale projektive Raum $\mathbb{P}^n(K)$ über K ist die Menge aller eindimensionalen Untervektorräume von K^{n+1}. Dann gibt es eine transitive Operation von $\mathrm{GL}_{n+1}(K)$ auf $\mathbb{P}^n(K)$, so dass der Stabilisator von Ke_1 zu $K^n \rtimes_\varphi (K^\times \times \mathrm{GL}_n(K))$ isomorph ist.

Aufgabe 4. (2 Punkte) Sei G eine endliche Gruppe und X eine endliche G-Menge. Zeigen Sie, dass

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Hinweis. Bemerken Sie zunächst, dass $\sum_{g\in G}|X^g| = \sum_{x \in X}|G_x|$. Bearbeiten Sie die letztere Summe mithilfe des Satzes von Lagrange und der Bahnformel.