Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 22/23
18.11.2022

Algebra
5. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 25.11.2022, 10:15

Aufgabe 1. (3 Punkte) Sei $n \geq 1$. Bestimmen Sie alle Konjugationsklassen von D_n und insbesondere das Zentrum $Z(D_n)$.

Hinweis. Es macht einen Unterschied, ob n gerade oder ungerade ist.

Aufgabe 2. (2+4 Punkte) Die Algebra $\mathbb{H}$ der Quaternionen ist die vierdimensionale $\mathbb{R}$-Algebra

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

wobei die Symbole i, j, k erfüllen

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad \text{und} \quad ij = -ji = k.$$

Die Multiplikation von beliebigen Quaternionen ist dann durch die Algebrenaxiome eindeutig bestimmt (z.B.: $ik = i^2j = -j$). Man kann zeigen, dass $\mathbb{H}^\times = \mathbb{H} \setminus \{0\}$, d.h., alle Elemente außer Null sind Einheiten (der Ring $\mathbb{H}$ ist jedoch kein Körper, denn seine Multiplikation ist nicht kommutativ).

Sei Q_8 die von $\{i, j, k\}$ erzeugte Untergruppe der Einheitengruppe $\mathbb{H}^\times$.

(a) Zeigen Sie, dass Q_8 eine 8-elementige nicht-abelsche Gruppe ist, die nicht zu D_4 isomorph ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede Gruppe G mit 8 Elementen zu einer der folgenden fünf Gruppen isomorph ist:

$$C_8 \qquad C_4 \times C_2 \qquad C_2^3 \qquad D_4 \qquad Q_8$$

Hinweis. Nach der Klassengleichung ist das Zentrum $Z(G)$ nicht trivial. Betrachten Sie dann die drei Möglichkeiten $|Z(G)| = 8, 4, 2$, mit Hilfe von Aufgabe 4(c) vom Blatt 3.

Aufgabe 3. (2+3+1+1) Sei K ein Körper und $n \geq 2$. Man definiert die *projektive lineare Gruppe* über K durch

$$\mathrm{PGL}_n(K) = \mathrm{GL}_n(K)/Z(\mathrm{GL}_n(K)).$$

(a) Zeigen Sie, dass $Z(\mathrm{GL}_n(K)) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in K^\times\}$.

Hinweis. $\mathrm{GL}_n(K)$ enthält die Elementarmatrizen $A_{ij}(1)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Operation von $\mathrm{GL}_n(K)$ auf $\mathbb{P}^{n-1}(K)$ (siehe Aufgabe 3 vom Blatt 4) eine *treue* Operation von $\mathrm{PGL}_n(K)$ auf $\mathbb{P}^{n-1}(K)$ induziert.

Verwenden Sie die Operation von $\mathrm{PGL}_2(K)$ auf $\mathbb{P}^1(K)$, um die folgenden Isomorphismen zu erhalten:

(c) $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$.

(d) $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \cong S_4$.