Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 22/23
02.12.2022

Algebra
7. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 09.12.2022, 10:15

Aufgabe 1. (3 Punkte) Zeigen Sie, dass jede Gruppe G mit 72 Elementen auflösbar ist.

Hinweis. Betrachten Sie die transitive Konjugationsoperation von G auf der Menge der p-Sylowgruppen.

Aufgabe 2. (2+2 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring. Ein Element $e \in R$ heißt *idempotent*, wenn $e^2 = e$ gilt. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $I \subset R$ ein Ideal. Das Tripel $(I, +, \cdot)$ ist genau dann ein Ring, wenn ein idempotentes Element $e \in R$ mit $I = (e)$ existiert.

Bemerkung. Das Ideal I ist aber *kein* Unterring von R, außer wenn $e = 1$.

(b) Ist $e \in R$ idempotent, so ist auch $1 - e$ idempotent, und die Abbildung

$$R \to (e) \times (1-e), \quad r \mapsto (re, r(1-e)),$$

ist ein Ringisomorphismus.

Aufgabe 3. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass jeder *endliche* Integritätsring ein Körper ist.

Aufgabe 4. (3 Punkte) Seien p und q verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie, dass jeder Ring mit pq Elementen zu $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_q$ isomorph ist.

Aufgabe 5. (3+1 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass der Ring

$$\mathbb{F}_{343} := \mathbb{F}_7[X]/(X^3 + 2)$$

ein Körper mit 343 Elementen ist.

Hinweis. Ist $I \subset \mathbb{F}_{343}$ ein Ideal, so ist sein Urbild in $\mathbb{F}_7[X]$ ein Hauptideal, das $X^3 + 2$ enthält.

(b) Konstruiren Sie einen Körper mit 49 Elementen.