Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 22/23
09.12.2022

Algebra
8. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 16.12.2022, 10:15

Aufgabe 1. (2+2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Quadrate und vierten Potenzen in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie, dass die diophantische Gleichung

$$x^{12}y^2 - 7x^8z^4 + 3x^4 + 2 = 0$$

keine ganzzahlige Lösung $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ besitzt.

Aufgabe 2. (1+1+1+1 Punkte) Bestimmen Sie jeweils, ob I ein Primideal bzw. ein maximales Ideal in R ist, indem Sie den Restklassenring R/I berechnen:

(a) $R = \mathbb{C}[X, Y]$, $I = (X - i)$

(b) $R = \mathbb{Z}[X]$, $I = (X + 2, X + 4)$

(c) $R = \mathbb{Z}[X]$, $I = (X + 2, X + 3)$

(d) $R = \mathbb{Z}[X, Y]$, $I = (X + Y - 5, X + Y)$

Aufgabe 3. (3 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal. Geben Sie einen direkten Beweis (d.h., ohne den Restklassenring $R/\mathfrak{m}$ zu verwenden) der Tatsache, dass $\mathfrak{m}$ ein Primideal ist.

Aufgabe 4. (1 Punkt) Sei X ein topologischer Raum, sei $C(X, \mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen $X \to \mathbb{R}$ und sei $x \in X$. Zeigen Sie, dass

$$\mathfrak{m}_x = \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid f(x) = 0\}$$

ein maximales Ideal in $C(X, \mathbb{R})$ ist.

Bemerkung. Der *Satz von Gelfand-Neumark* impliziert eine Umkehrung dieser Aussage: Wenn X ein kompakter Hausdorff-Raum ist, dann hat jedes maximale Ideal in $C(X, \mathbb{R})$ die Form $\mathfrak{m}_x$.

Aufgabe 5. (2+2 Punkte) Sei $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ der Ring aller Folgen rationalen Zahlen (mit den punktweisen Verknüpfungen), und seien

$$\mathrm{Null}(\mathbb{Q}) \subset \mathrm{Konv}(\mathbb{Q}) \subset \mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$$

die Teilmengen der Nullfolgen (d.h., Folgen, die gegen 0 konvergieren), der konvergenten Folgen, und der Cauchy-Folgen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mathrm{Konv}(\mathbb{Q})$ und $\mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})$ sind Unterringe von $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ und $\mathrm{Null}(\mathbb{Q})$ ist ein Ideal in $\mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})$.

(b) Das Ideal $\mathrm{Null}(\mathbb{Q})$ ist maximal in beiden Ringen $\mathrm{Konv}(\mathbb{Q})$ und $\mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})$.

Hinweis. Konstruieren Sie Ringisomorphismen

$$\mathrm{Konv}(\mathbb{Q})/\mathrm{Null}(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q} \quad \text{und} \quad \mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q})/\mathrm{Null}(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}.$$