Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 22/23
16.12.2022

Algebra
9. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 23.12.2022, 10:15

Aufgabe 1. (1+2 Punkte) Sei K ein Körper. Eine *diskrete Bewertung* auf K ist eine Abbildung $v\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ mit folgenden Eigenschaften (für alle $x, y \in K$):

- $v(x) = +\infty \iff x = 0$
- $v(xy) = v(x) + v(y)$
- $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$

Zeigen Sie:

(a) Ist v eine diskrete Bewertung auf K, so ist $\{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ ein Unterring von K (der *Bewertungsring* zu v).

(b) Sei R ein faktorieller Ring und $p \in R$ ein Primelement. Dann ist die p-Bewertung $v_p\colon Q(R) \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ eine diskrete Bewertung auf $Q(R)$.

Aufgabe 2. (2 Punkte) Sei p eine Primzahl. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) p ist ein Primelement von $\mathbb{Z}[i]$.

(b) p ist keine Summe zweier Quadrate in $\mathbb{Z}$.

Bemerkung. Der *Zwei-Quadrate-Satz* der Zahlentheorie sagt, dass dies genau dann der Fall ist, wenn $p \equiv 3 \pmod 4$.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Weisen Sie nach, dass die folgenden Polynome irreduzibel sind:

(a) $X^2 - 2$ in $\mathbb{F}_3[X]$.

(b) $X^2 - T$ in $\mathbb{R}[T, X]$.

(c) $X^3 + 2X + 1$ in $\mathbb{Z}[X]$.

(d) $\frac{1}{6}X^7 + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$.

(e) $X^3 + 21X^2 + 42X + 15$ in $\mathbb{Q}[X]$.

(f) $X^3 + 21X^2 + 42X + 9$ in $\mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 4. (1+2+2) Sei K ein Körper und sei $R = K[X, Y]/(Y^2 - X^3)$. Seien $x, y \in R$ die Restklassen von X, Y.

(a) Falls $K = \mathbb{R}$, skizzieren Sie die Kurve $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b^2 - a^3 = 0\}$.

(b) Konstruieren Sie einen Isomorphismus zwischen R und einem Unterring von $K[T]$, der x und y auf Potenzen von T abbildet.

Hinweis. Zur Injektivität ist es hilfreich, eine Basis von R über K zu verwenden.

(c) Schließen Sie daraus, dass R kein faktorieller Ring ist.

Hinweis. Zeigen Sie, dass x und y irreduzibel sind, aber nicht prim.

Bemerkung. Dies ist ein Beispiel des Zusammenhangs zwischen Algebra und Geometrie: Die Tatsache, dass R kein faktorieller Ring ist, hängt damit zusammen, dass die algebraische Kurve aus (a) eine Singularität besitzt (die „Spitze" im Punkt $(0, 0)$).