

Sur la cohomologie des schémas

Marc Hoyois

7 juin 2008

Table des matières

Table des matières	2
I Schémas	3
§1 Le langage des schémas	3
§2 Modules quasi-cohérents	15
§3 Spectres premiers homogènes	23
II Cohomologie	30
§1 Cohomologie des faisceaux	30
§2 Cohomologie de Čech	37
§3 Cohomologie des schémas affines et des espaces projectifs	43
Bibliographie	48

Chapitre I

Schémas

§1 Le langage des schémas

1.1 Un *espace annelé* est un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux, appelé *faisceau structural*. Si X est un espace annelé, on notera aussi X l'espace topologique et même l'ensemble sous-jacents à X , et on notera \mathcal{O}_X son faisceau structural. Un *espace géométrique* est un espace annelé dont les fibres du faisceau structural sont des anneaux locaux.

Soient X et Y des espaces annelés. Un morphisme d'espaces annelés f de X vers Y consiste en une application continue $X \rightarrow Y$, également notée f , et en un morphisme de faisceaux d'anneaux $\mathcal{O}_f: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$. Si \mathcal{O}_f^\sharp désigne le morphisme $f^*(\mathcal{O}_Y) \rightarrow \mathcal{O}_X$ adjoint à \mathcal{O}_f et si x est un point de X , l'isomorphisme canonique $(f^*(\mathcal{O}_Y))_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{Y,f(x)}$ permet d'identifier le morphisme $\mathcal{O}_{f,x}^\sharp$ induit par \mathcal{O}_f^\sharp à un morphisme $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$. Avec cette identification, si $f = gh$, alors $\mathcal{O}_{f,x}^\sharp = \mathcal{O}_{h,x}^\sharp \mathcal{O}_{g,h(x)}^\sharp$. Si X et Y sont des espaces géométriques, un morphisme d'espaces géométriques f de X vers Y est un morphisme d'espaces annelés tel que les morphismes $\mathcal{O}_{f,x}^\sharp$ induits par \mathcal{O}_f^\sharp sur les fibres soient locaux. On note **Esa** la catégorie des espaces annelés et **Esg** la sous-catégorie de **Esa** formée des espaces géométriques et des morphismes d'espaces géométriques.

1.2 Soit X un espace géométrique. Si x est un point de X , on note \mathfrak{m}_x l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ et $\kappa(x)$ le corps résiduel $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$. Si s est une section de \mathcal{O}_X au-dessus d'un ouvert U et si $x \in U$, la *valeur de s en x* est l'image canonique du germe s_x dans $\kappa(x)$, notée $s(x)$. Si $s(x) \neq 0$, il existe une section t au-dessus d'un voisinage de x dans U telle que $s_x t_x = 1$, et donc on a $s_y t_y = 1$ pour tout y dans un voisinage de x ; l'ensemble des x dans U pour lesquels $s(x) \neq 0$ est donc un ouvert de U , noté U_s et appelé *ouvert spécial* de U . Observons les relations $U = U_1$ et $U_s \cap U_t = U_{st}$. Lorsque $s(x) = 0$ on dit que x est un *zéro* de s ou encore que s s'annule en x . On remarquera que l'ensemble des zéros communs d'une partie de $\mathcal{O}_X(U)$ est fermé dans U , car son complémentaire dans U est réunion d'ouverts spéciaux.

1.3 Proposition. *Pour qu'un morphisme d'espaces annelés $f: X \rightarrow Y$ soit un monomorphisme, il suffit que l'application continue sous-jacente à f soit injective et que le morphisme $\mathcal{O}_f^\sharp: f^*\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ adjoint à \mathcal{O}_f soit un épimorphisme de faisceaux d'anneaux.*

Démonstration. Soient $g, h: X' \rightrightarrows X$ deux morphismes tels que $fg = fh$. On obtient de la première condition que les applications continues sous-jacentes à g et à h coïncident. On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 f^*(\mathcal{O}_Y) & \longrightarrow & f^*f_*(\mathcal{O}_X) & \rightrightarrows & f^*f_*g_*(\mathcal{O}_{X'}) \\
 & \searrow \mathcal{O}_f^\sharp & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathcal{O}_X & \xrightarrow[\mathcal{O}_h]{\mathcal{O}_g} & g_*(\mathcal{O}_{X'})
 \end{array}$$

les deux morphismes formant la première ligne étant $f^*\mathcal{O}_{fg}$ et $f^*\mathcal{O}_{fh}$. Les deux carrés y sont commutatifs par naturalité des flèches verticales. Sachant que le triangle à gauche commute et que $f^*\mathcal{O}_{fg} = f^*\mathcal{O}_{fh}$, on obtient $\mathcal{O}_g\mathcal{O}_f^\sharp = \mathcal{O}_h\mathcal{O}_f^\sharp$, d'où $\mathcal{O}_g = \mathcal{O}_h$. \square

1.4 Soient X un espace annelé, P une partie de l'espace topologique X , et $i: P \rightarrow X$ l'inclusion. L'espace topologique P devient un espace annelé lorsqu'on le munit du faisceau d'anneaux $i^*(\mathcal{O}_X)$, que l'on notera aussi $\mathcal{O}_X|_P$, et l'application continue i devient un morphisme d'espaces annelés en prenant pour \mathcal{O}_i le morphisme canonique $\mathcal{O}_X \rightarrow i_*i^*(\mathcal{O}_X)$. Si X est un espace géométrique, P est aussi un espace géométrique et i est un morphisme d'espaces géométriques. En effet, si

x est un point de P , le morphisme $\mathcal{O}_{i,x}^\sharp$ est un isomorphisme; en particulier, il est local. On appelle i le *morphisme d'inclusion* du sous-espace P dans X . Si $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme d'espaces annelés, le morphisme composé fi s'appelle la *restriction* de f à P et est noté $f|_P$. La proposition 1.3 montre que i est un monomorphisme d'espaces annelés.

Tout morphisme d'espaces annelés $f: X \rightarrow Y$ se factorise de manière unique en

$$X \xrightarrow{g} P \xrightarrow{i} Y$$

chaque fois que $f(X) \subset P \subset Y$, où i est le morphisme d'inclusion du sous-espace P dans Y . Explicitement, le morphisme $\mathcal{O}_g: i^*(\mathcal{O}_Y) \rightarrow g_*(\mathcal{O}_X)$ est l'adjoint du morphisme $\mathcal{O}_f: \mathcal{O}_Y \rightarrow i_*g_*(\mathcal{O}_X)$. Puisque $\mathcal{O}_{f,x}^\sharp = \mathcal{O}_{g,x}^\sharp \mathcal{O}_{i,f(x)}^\sharp$, g est un morphisme d'espaces géométriques si et seulement si f l'est.

1.5 Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces annelés que l'on factorise en

$$X \xrightarrow{g} f(X) \hookrightarrow Y.$$

On dit que f est une *immersion ouverte* si $f(X)$ est ouvert dans Y et si g est un isomorphisme. Dans ce cas, f est un monomorphisme d'espaces annelés en tant que composition de monomorphismes. On dit que f est une *immersion fermée* si $f(X)$ est fermé dans Y , si g est un homéomorphisme et si \mathcal{O}_f^\sharp est un épimorphisme (on entendra toujours par là un épimorphisme de faisceaux d'ensembles, même si, comme c'est le cas ici, le morphisme en question est un morphisme de faisceaux d'anneaux). Rappelons que cette dernière condition a lieu exactement lorsque les morphismes $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ induits par \mathcal{O}_f^\sharp sont surjectifs. Les immersions fermées sont des monomorphismes en vertu de la proposition 1.3.

On dit qu'un morphisme d'espaces annelés f est une *immersion localement fermée*, ou simplement une *immersion*, s'il se factorise en gh où g est une immersion ouverte et h est une immersion fermée. Un tel f est un monomorphisme d'espaces annelés par ce qui précède. Puisque \mathcal{O}_g^\sharp induit des isomorphismes sur les fibres, on a que f est un morphisme d'espaces géométriques si et seulement si g et h le sont. Pour qu'un morphisme d'espaces annelés $f: X \rightarrow Y$ soit une immersion localement fermée, il faut et il suffit que f induise un homéomorphisme de X sur une partie localement fermée de Y et que \mathcal{O}_f^\sharp soit un épimorphisme; dans ce cas, f est une immersion fermée si et seulement si $f(X)$ est fermé dans Y . On en déduit les critères suivants. Si $(U_i)_{i \in I}$ et $(V_j)_{j \in J}$ sont des recouvrements ouverts de X et de Y , alors f est une immersion ouverte ou localement fermée si et seulement si les $f|_{U_i}$ le sont, et f est une immersion ouverte, fermée ou localement fermée si et seulement si les morphismes $f^{-1}(V_j) \rightarrow V_j$ induits par $f|_{f^{-1}(V_j)}$ le sont.

Il est clair qu'une composition d'immersions ouvertes, fermées ou localement fermées est encore une immersion du même type.

1.6 Reprenons les notations de 1.5. Dans la définition d'immersion fermée, on peut remplacer la dernière condition par la suivante: \mathcal{O}_f est un épimorphisme de faisceau. En effet, comme f induit un homéomorphisme de X sur une partie de Y , tout ouvert de X est préimage d'un ouvert de Y ; il s'ensuit que le morphisme canonique $(f_*(\mathcal{O}_X))_{f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est un isomorphisme. Si \mathcal{O}_f est un épimorphisme de faisceaux, ce qui revient à dire que $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow (f_*(\mathcal{O}_X))_y$ est surjectif pour tout $y \in Y$, on en déduit que le morphisme $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est également surjectif pour tout $x \in X$, c'est-à-dire que \mathcal{O}_f^\sharp est un épimorphisme. Réciproquement, si \mathcal{O}_f^\sharp est un épimorphisme, \mathcal{O}_f l'est également par ce qui précède et le fait que, puisque $f(X)$ est fermé dans Y , $(f_*(\mathcal{O}_X))_y = 0$ si $y \in Y - f(X)$.

Soient Z un espace annelé, X et Y des espaces géométriques et $f: X \rightarrow Z$, $g: Y \rightarrow Z$ des immersions fermées. Supposons que $\ker \mathcal{O}_f = \ker \mathcal{O}_g$ en tant que sous-faisceaux de \mathcal{O}_Z . Sachant que \mathcal{O}_f et \mathcal{O}_g sont des épimorphismes, il existe un unique isomorphisme de faisceaux d'anneaux $\varphi: g_*(\mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{O}_X)$ tel que $\varphi \mathcal{O}_g = \mathcal{O}_f$. Comme par ce qu'on vient de voir la fibre de $f_*(\mathcal{O}_X)$ en un point $z \in Z$ est nulle si $z \in Z - f(X)$ et s'identifie à $\mathcal{O}_{X,x}$ si $z = f(x)$, le support de $f_*(\mathcal{O}_X)$ est l'ensemble des points $f(x)$ tels que $\mathcal{O}_{X,x} \neq 0$; mais cette dernière condition est vérifiée pour tout point de X car X est un espace géométrique, et donc $f(X)$ est exactement le support de $f_*(\mathcal{O}_X)$. On a donc $f(X) = g(Y)$, et comme f et g induisent des homéomorphismes $X \xrightarrow{\sim} f(X)$

et $Y \xrightarrow{\sim} g(Y)$, il existe un unique homéomorphisme $h: X \xrightarrow{\sim} Y$ tel que $gh = f$. Puisque tout ouvert de Y est de la forme $g^{-1}(V)$ pour un ouvert V de Z , les isomorphismes φ_V définissent un isomorphisme de faisceaux d'anneaux $\mathcal{O}_h: \mathcal{O}_Y \rightarrow h_*(\mathcal{O}_X)$. En effet, si $g^{-1}(V) = g^{-1}(W)$, alors $\varphi_V = \varphi_{V \cap W} = \varphi_W$. Il existe donc un isomorphisme d'espaces géométriques h tel que $gh = f$. Ceci montre qu'une immersion fermée $f: X \rightarrow Z$ d'un espace géométrique dans un espace annelé est entièrement déterminée, à un isomorphisme de $(\mathbf{Esa} \downarrow Z)$ près, par le noyau de \mathcal{O}_f .

1.7 Proposition. *Tout diagramme $d: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Esa}$ admet une limite inductive. En outre, le foncteur oubli $\mathbf{Esg} \rightarrow \mathbf{Esa}$ crée les limites inductives.*

Démonstration. On commence par construire un espace annelé X et des flèches $di \rightarrow X$ pour $i \in \mathbf{Obl}$, puis on montrera qu'il s'agit de la limite inductive du diagramme dans \mathbf{Esa} . On prend pour espace topologique sous-jacent à X la limite inductive dans \mathbf{Top} du diagramme induit sur les espaces topologiques. On a donc des applications continues canoniques $di \rightarrow X$ pour tout $i \in \mathbf{Obl}$. Le diagramme d induit alors un diagramme $d': \mathbf{I}^\circ \rightarrow \mathbf{An}_X$ de faisceaux d'anneaux sur X , en prenant pour $d'i$ l'image directe par l'application $di \rightarrow X$ du faisceau structural de di et pour $d'f$, si $f: j \rightarrow i$ est une flèche de \mathbf{I} , l'image directe par la même application du morphisme \mathcal{O}_{df} . Le faisceau structural \mathcal{O}_X est alors la limite projective du diagramme d' . La vérification que X est limite inductive du diagramme dans \mathbf{Esa} est purement formelle sachant que le foncteur f , entre catégories de faisceaux d'anneaux induit par une application continue f commute aux limites projectives, étant adjoint à droite au foncteur f^* .

Il reste à montrer que si d est un diagramme d'espaces géométriques, alors la limite construite ci-dessus est bien une limite du diagramme dans \mathbf{Esg} . Puisqu'en général on peut obtenir toutes les limites inductives à partir de sommes et de conoyaux, il suffit de le vérifier lorsque d est un diagramme de somme (c'est-à-dire lorsque \mathbf{I} est discrète), et lorsque d est une double flèche. La conclusion cherchée est apparente dans le premier cas. Considérons donc un diagramme $f, g: X \rightrightarrows Y$ dans \mathbf{Esg} , et soit $h: Y \rightarrow Z$ sa limite inductive dans \mathbf{Esa} . Le morphisme $\mathcal{O}_h: \mathcal{O}_Z \rightarrow h_*(\mathcal{O}_Y)$ est donc la limite projective du diagramme $h_*(\mathcal{O}_f), h_*(\mathcal{O}_g): h_*(\mathcal{O}_Y) \rightrightarrows h_*f_*(\mathcal{O}_X)$. Vérifions d'abord que h est un morphisme d'espaces géométriques. Soit W un ouvert de Z , $V = h^{-1}(W)$ et $U = f^{-1}(V) = g^{-1}(V)$. Le morphisme $\mathcal{O}_{h,W}$ identifie les sections de \mathcal{O}_Z au-dessus de W aux sections s de \mathcal{O}_Y au-dessus de V qui vérifient $\mathcal{O}_{f,V}(s) = \mathcal{O}_{g,V}(s)$. Soient $t \in \mathcal{O}_Z(W)$, $s = \mathcal{O}_{h,W}(t)$ et $r = \mathcal{O}_{f,V}(s) = \mathcal{O}_{g,V}(s)$. Puisque $\mathcal{O}_{f,x}$ et $\mathcal{O}_{g,x}$ sont des morphismes locaux pour tout $x \in X$, on a $f^{-1}(V_s) = U_r = g^{-1}(V_s)$. Par conséquent, $h(V_s)$ est un ouvert de Z et $h^{-1}(h(V_s)) = V_s$. On prétend que $h(V_s)$ est précisément l'ensemble des points de W où le germe de t est inversible, que l'on notera W_t . En effet, si $y \in V_s$, $t_{h(y)}$ a pour inverse le germe de $\mathcal{O}_{h,h(V_s)}^{-1}((s|_{V_s})^{-1})$ en $h(y)$. Réciproquement, si t_z est inversible et si $z = h(y)$, alors s_y a pour inverse $\mathcal{O}_{h,y}(t_z^{-1})$. Si maintenant t et t' sont des sections de \mathcal{O}_Z au-dessus de W , comme Y est un espace géométrique, on a $W_{t+t'} = h(V_{s+s'}) \subset h(V_s) \cup h(V_{s'}) = W_t \cup W_{t'}$. Ceci étant valable pour tout ouvert W de Z , Z est un espace géométrique. De plus, les inclusions $h(V_s) \subset W_t$ montrent que $\mathcal{O}_{h,y}$ est local pour tout $y \in Y$. Finalement, on montre que h est bien le conoyau du diagramme dans \mathbf{Esg} . Soient T un espace géométrique et $k: Y \rightarrow T$ un morphisme d'espaces géométriques vérifiant $kf = kg$. Soit $l: Z \rightarrow T$ l'unique morphisme d'espaces annelés vérifiant $k = lh$. Si $y \in Y$, l'égalité $\mathcal{O}_{k,y}^\# = \mathcal{O}_{h,y}^\# \mathcal{O}_{l,h(y)}^\#$ montre que $\mathcal{O}_{l,h(y)}^\#$ est un morphisme local; comme l'application continue h est surjective, l est un morphisme d'espaces géométriques. \square

L'énoncé analogue pour les limites projectives n'est pas vrai. Tout diagramme d'espaces annelés a bien une limite projective, dont la construction est parfaitement duale à celle de sa limite inductive, mais le foncteur $\mathbf{Esg} \rightarrow \mathbf{Esa}$ ne préserve pas les limites projectives. Par exemple, si X et Y sont des espaces géométriques n'ayant qu'un seul point et si \mathcal{O}_X et \mathcal{O}_Y sont des corps de caractéristiques distinctes, on voit immédiatement que le produit $X \times Y$ existe dans \mathbf{Esg} et que son espace sous-jacent est vide. En fait, si X est la limite projective dans \mathbf{Esa} d'un diagramme $d: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Esg}$ et si $p_i: X \rightarrow di$ sont les projections canoniques, alors X est limite projective du diagramme dans \mathbf{Esg} si et seulement si la condition suivante est vérifiée: pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est limite inductive dans la catégorie des anneaux locaux (avec les morphismes locaux) du diagramme $i \mapsto \mathcal{O}_{di,p_i(x)}$ sur \mathbf{I}° . Ceci est vérifié par exemple lorsque d est une double flèche.

1.8 Supposons donnés une famille d'espaces annelés $(X_i)_{i \in I}$ et pour tous i, j dans I distincts un ouvert U_{ij} de X_i et des isomorphismes $\varphi_{ij}: U_{ij} \xrightarrow{\sim} U_{ji}$ vérifiant $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$. Supposons

de plus que pour tous i, j et k deux à deux distincts, $\varphi_{ij}|_{U_{ij} \cap U_{ik}}$ induise un isomorphisme $\varphi_{ijk}: U_{ij} \cap U_{ik} \xrightarrow{\sim} U_{ji} \cap U_{jk}$, et que ces isomorphismes vérifient $\varphi_{jki}\varphi_{ijk} = \varphi_{ikj}$. Ces données définissent un diagramme $d: \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{Esa}$ de la manière suivante. Pour tous i et j dans I distincts, x_i et u_{ij} sont des objets de \mathbf{l} , et tous les objets de \mathbf{l} sont de cette forme. Les flèches de \mathbf{l} sont $f_{ij}: u_{ij} \rightarrow x_i$ et $g_{ij}: u_{ij} \rightarrow u_{ji}$. On pose alors $dx_i = X_i$, $du_{ij} = U_{ij}$, df_{ij} égal au morphisme d'inclusion $U_{ij} \hookrightarrow X_i$ et $dg_{ij} = \varphi_{ij}$. Un tel diagramme sera appelé un *diagramme de recollement*.

Proposition. *Soit $d: \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{Esa}$ un diagramme de recollement, et soit X sa limite inductive. Pour tout $i \in \text{Ob } \mathbf{l}$, le morphisme canonique $di \rightarrow X$ est une immersion ouverte (1.5).*

Démonstration. Reprenons les notations précédant l'énoncé de la proposition. Il suffit manifestement de montrer que les morphismes canonique $f_i: X_i \rightarrow X$ sont des immersions ouvertes. Il est clair que f_i est un homéomorphisme de X_i sur une partie ouverte de X , l'espace topologique X étant obtenu en recollant les espaces topologiques X_i le long des homéomorphismes φ_{ij} . Soient U un ouvert de X_i et $V = f_i(U)$. Sachant que le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(V)$ de \mathbf{An}_X vers \mathbf{An} commute aux limites projectives, l'anneau $\mathcal{O}_X(V)$ est la limite projective du diagramme d'_V obtenu en composant d' (1.7) avec ce foncteur; il s'identifie donc au sous-anneau du produit $\prod_{j \in I} \mathcal{O}_{X_j}(f_j^{-1}(V))$ formé des familles $(s_j)_{j \in I}$ vérifiant pour tous j et k les relations

$$\mathcal{O}_{\varphi_{kj}}(s_j|_{f_j^{-1}(V)} \cap U_{jk}) = s_k|_{f_k^{-1}(V)} \cap U_{kj}. \quad (1)$$

(Dans cette équation et dans celles qui suivent, on écrit pour simplifier $\mathcal{O}_f(s)$ au lieu de $\mathcal{O}_{f,U}(s)$.) Pour compléter la preuve, il suffit de montrer que la projection canonique $p: \mathcal{O}_X(V) \rightarrow \mathcal{O}_{X_i}(U)$ est un isomorphisme d'anneaux. Comme $f_j^{-1}(V) \subset U_{ji}$, les relations (1) montrent que pour qu'une famille $(s_j)_{j \in I}$ soit dans $\mathcal{O}_X(V)$, il faut que $s_j = \mathcal{O}_{\varphi_{ji}}(s_i|_{U_{ij} \cap U})$ pour tout $j \neq i$; donc p est injectif. Inversément, vérifions que si les s_j sont ainsi posés, on a bien $(s_j)_{j \in I} \in \mathcal{O}_X(V)$, ce qui implique que p est surjectif. On note que pour tous j et k distincts de i , $s_j|_{f_j^{-1}(V)} \cap U_{jk} = \mathcal{O}_{\varphi_{jik}}(s_i|_{U_{ij} \cap U_{ik} \cap U})$. Donc $\mathcal{O}_{\varphi_{kj}}(s_j|_{f_j^{-1}(V)} \cap U_{jk}) = \mathcal{O}_{\varphi_{kji}}\mathcal{O}_{\varphi_{jik}}(s_i|_{U_{ij} \cap U_{ik} \cap U}) = \mathcal{O}_{\varphi_{kij}}(s_i|_{U_{ik} \cap U_{ij} \cap U}) = s_k|_{f_k^{-1}(V)} \cap U_{kj}$. \square

Dans le cas où $(X_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert d'un espace annelé X avec $U_{ij} = X_i \cap X_j$ et $\varphi_{ij} = \text{id}$, on sait de la théorie des faisceaux que \mathcal{O}_X est limite projective du diagramme d' , et donc que X lui-même, avec les morphismes d'inclusion $X_i \hookrightarrow X$, est limite inductive du diagramme d . La proposition signifie précisément que tout diagramme de recollement est isomorphe à un diagramme de cette forme. Étant donné pour tout i des morphismes $h_i: X_i \rightarrow Y$ tels que $h_i|_{U_{ij}} = h_j|_{U_{ij}}$, on en déduit qu'il existe un unique morphisme $h: X \rightarrow Y$ tel que $h|_{X_i} = h_i$ pour tout i .

1.9 Pour X un espace annelé, on note aussi $\mathcal{O}(X)$ l'anneau des sections globales $\mathcal{O}_X(X)$. Si $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme d'espaces annelés, $\mathcal{O}(f)$ désigne le morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_{f,Y}: \mathcal{O}(Y) \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}(X)$.

Théorème. *Le foncteur $\mathcal{O}^\circ: \mathbf{Esg} \rightarrow \mathbf{An}^\circ$ possède un adjoint à droite. De plus, la counité de cette adjonction est un isomorphisme.*

Démonstration. On commence par décrire le foncteur adjoint $\text{Spec}: \mathbf{An}^\circ \rightarrow \mathbf{Esg}$ sur les objets. Soit A un anneau. L'ensemble sous-jacent à $\text{Spec } A$ est l'ensemble des idéaux premiers de A . Si E est une partie de A , on note $V(E)$ l'ensemble des idéaux premiers de A contenant E . On prend alors pour parties fermées de $\text{Spec } A$ toutes les parties de la forme $V(E)$. On définit sur $\text{Spec } A$ un préfaisceau d'anneaux \mathcal{F} comme suit. Si U est un ouvert de $\text{Spec } A$, soit $S(U)$ l'ensemble des éléments de A n'appartenant à aucun élément de U . On pose $\mathcal{F}(U)$ égal à l'anneau de fractions $S(U)^{-1}A$. Si $V \subset U$, on prend pour morphisme de restriction le morphisme canonique $S(U)^{-1}A \rightarrow S(V)^{-1}A$. On voit immédiatement que la fibre de \mathcal{F} en un point x s'identifie à l'anneau local A_x , de sorte que $\text{Spec } A$ devient un espace géométrique lorsqu'on le munit du faisceau associé au préfaisceau \mathcal{F} . On note ε_A le morphisme canonique $A \xrightarrow{\sim} (A^*)^{-1}A = \mathcal{F}(\text{Spec } A) \rightarrow \mathcal{O}(\text{Spec } A)$.

Soit maintenant $\varphi: A \rightarrow \mathcal{O}(X)$ un morphisme d'anneaux. On lui associe un morphisme d'espaces géométriques $\varphi^b: X \rightarrow \text{Spec } A$. Pour $x \in X$, $\varphi^b(x)$ sera l'image réciproque de \mathfrak{m}_x par la composition

$$A \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

où la seconde flèche est canonique. L'application φ^b est continue : l'image réciproque par φ^b d'un fermé $V(E)$ de $\text{Spec } A$ est l'ensemble des zéros communs des éléments de $\varphi(E)$, qui est fermé dans X (1.2). Soient U un ouvert de $\text{Spec } A$, a un élément de $S(U)$ et x un point de X tel que $\varphi^b(x)$ soit dans U . Alors $a \notin \varphi^b(x)$ par définition de $S(U)$, ce qui revient à dire, par définition de φ^b , que $\varphi(a)_x$ est inversible dans $\mathcal{O}_{X,x}$. Ceci étant valable pour tout $a \in S(U)$ et tout $x \in (\varphi^b)^{-1}(U)$, il s'ensuit que les éléments de l'image de $S(U)$ par le morphisme composé

$$A \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}_X((\varphi^b)^{-1}(U))$$

sont inversibles, et donc que ce morphisme se factorise de manière unique en

$$A \rightarrow S(U)^{-1}A \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{O}_X((\varphi^b)^{-1}(U)). \quad (2)$$

Pour la même raison, si $V \subset U$, il existe une unique flèche $\psi'_V: S(V)^{-1}A \rightarrow \mathcal{O}_X((\varphi^b)^{-1}(V))$ faisant commuter le rectangle à droite dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & S(U)^{-1}A & \xrightarrow{\psi_U} & \mathcal{O}_X((\varphi^b)^{-1}(U)) \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & S(V)^{-1}A & \xrightarrow{\psi'_V} & \mathcal{O}_X((\varphi^b)^{-1}(V)). \end{array}$$

Puisque le triangle à gauche commute également, le contour du diagramme commute. L'unicité de la décomposition (2) implique alors que $\psi'_V = \psi_V$, et par suite que la famille des ψ_U est un morphisme de préfaisceaux d'anneaux $\psi: \mathcal{F} \rightarrow \varphi^b_*(\mathcal{O}_X)$. En passant aux limites inductives, on voit que le morphisme $\psi_x: A_{\varphi^b(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ envoie un élément $a/1$ sur $\varphi(a)_x$. Par définition de φ^b , si $a \in \varphi^b(x)$, alors $\varphi(a)_x \in \mathfrak{m}_x$. Le morphisme ψ est donc local sur les fibres, de même que le morphisme induit $\mathcal{O}_{\varphi^b}: \mathcal{O}_{\text{Spec } A} \rightarrow \varphi^b_*(\mathcal{O}_X)$. Ceci achève la définition de φ^b .

Nous montrons maintenant que les applications $\varphi \mapsto \varphi^b$ et $f \mapsto \mathcal{O}(f)\varepsilon_A$ sont des bijections réciproques entre $\text{An}^\circ(\mathcal{O}(X), A)$ et $\text{Esg}(X, \text{Spec } A)$. Le fait que $\varphi = \mathcal{O}(\varphi^b)\varepsilon_A$ découle de la commutativité des triangles dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{F}(\text{Spec } A) & \longrightarrow & \mathcal{O}(X) \\ & \searrow \varepsilon_A & \downarrow & \nearrow \mathcal{O}(\varphi^b) & \\ & & \mathcal{O}(\text{Spec } A) & & \end{array}$$

dont la première ligne est φ . D'autre part, si $x \in X$, $(\mathcal{O}(f)\varepsilon_A)^b(x)$ est l'ensemble des éléments a de A tels que $\mathcal{O}_{f,x}(a/1)$ appartienne à \mathfrak{m}_x . Puisque $\mathcal{O}_{f,x}$ est local, si $a \in f(x)$, alors $\mathcal{O}_{f,x}(a/1) \in \mathfrak{m}_x$. Réciproquement, si $\mathcal{O}_{f,x}(a/1) \in \mathfrak{m}_x$, alors $a/1$ n'est pas inversible dans $A_{f(x)}$, donc $a \in f(x)$. Ainsi, les applications continues sous-jacentes à f et à $(\mathcal{O}(f)\varepsilon_A)^b$ coïncident. Pour voir que les morphismes de faisceaux sous-jacents coïncident également, il suffit de remarquer que \mathcal{O}_f , étant un morphisme de faisceaux, fait commuter les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\varepsilon_A} & \mathcal{O}(\text{Spec } A) & \xrightarrow{\mathcal{O}(f)} & \mathcal{O}(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U) & \xrightarrow{\mathcal{O}_{f,U}} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)), \end{array}$$

et que $\mathcal{O}_{(\mathcal{O}(f)\varepsilon_A)^b}$ est, par définition, l'unique tel morphisme.

Ceci montre que $\varepsilon_A: A \rightarrow \mathcal{O}(\text{Spec } A)$ est une flèche universelle de \mathcal{O}° vers A pour tout anneau A . Par conséquent, Spec est un foncteur et ε est la counité d'une adjonction $\mathcal{O}^\circ, \text{Spec}: \mathbf{Esg} \rightleftarrows \mathbf{An}^\circ$. La proposition 1.11 appliquée à $U = \text{Spec } A$ montre que ε_A est un isomorphisme pour tout A . \square

1.10 Soit A un anneau. L'espace géométrique $\text{Spec } A$ s'appelle le *spectre premier* de A . Si E est une partie de A , on note $D(E)$ l'ouvert de $\text{Spec } A$ complémentaire de $V(E)$. Lorsque $E = \{a_1, \dots, a_n\}$, on écrit aussi $V(a_1, \dots, a_n)$ et $D(a_1, \dots, a_n)$ au lieu de $V(E)$ et $D(E)$. Des relations évidentes $D(\bigcup_k E_k) = \bigcup_k D(E_k)$ et $D(E) \cap D(F) = D(\{ab \mid a \in E \text{ et } b \in F\})$ on conclut que les ouverts $D(a)$, pour $a \in A$, forment une base de la topologie de $\text{Spec } A$.

Notons encore quelques propriétés élémentaires de V . Si E est une partie de A , on a évidemment $V(E) = V((E))$, où (E) désigne l'idéal de A engendré par E . Si E et F sont deux parties de A , alors $V(E) \subset V(F)$ si et seulement si $\mathfrak{r}((E)) \supset \mathfrak{r}((F))$, où $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ est la racine de l'idéal \mathfrak{a} . Ainsi, V (resp. D) induit une bijection entre les idéaux \mathfrak{a} de A tels que $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ et les parties fermées (resp. ouvertes) de $\text{Spec } A$. Puisque $\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) = A$ est équivalent à $\mathfrak{a} = A$, on a en particulier que $V(E)$ est vide si et seulement si $(E) = A$. Inversément, pour que $V(E) = A$, il faut et il suffit que tous les éléments de E soient nilpotents. Puisque pour un idéal premier \mathfrak{p} et pour $n \geq 1$, $f \in \mathfrak{p}$ si et seulement si $f^n \in \mathfrak{p}$, on a pour tout $n \geq 1$ la relation $V(f) = V(f^n)$.

Proposition. *Soit A un anneau et E une partie finie de A . Alors $D(E)$ est une partie quasi-compacte de $\text{Spec } A$. En particulier, $\text{Spec } A = D(1)$ est un espace topologique quasi-compact.*

Démonstration. Il suffit de traiter le cas $E = \{f\}$. Puisque les ouverts $D(g)$ forment une base de la topologie de $\text{Spec } A$, il suffit de montrer que d'un recouvrement de $D(f)$ par des ouverts $D(g)$, $g \in F$, on peut extraire un sous-recouvrement fini. Dans cette situation, $D(f) = \bigcup_{g \in F} D(g) = D(F)$, ce qui implique qu'une certaine puissance f^m de f ($m \geq 1$) appartient à (F) . Par suite, il existe g_1, \dots, g_n dans F et f_1, \dots, f_n dans A tels que $f^m = \sum f_i g_i$, et puisque $D(f^m) = D(f)$, les $D(g_i)$ forment un sous-recouvrement fini du recouvrement donné. \square

1.11 Proposition. *Soit A un anneau et U un ouvert spécial de $\text{Spec } A$. Les notations étant celles de 1.9, le morphisme canonique $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(U)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Soit $X = \text{Spec } A$. On montre d'abord la proposition pour les ouverts spéciaux de la forme $X_{\varepsilon_A(a)}$ pour $a \in A$. Appliquant ceci à $a = 1$, on obtiendra que ε_A est un isomorphisme, d'où le résultat général. Puisque le morphisme canonique de \mathcal{F} dans $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ induit des isomorphismes sur les fibres, l'ouvert spécial $X_{\varepsilon_A(a)}$ n'est autre que l'ouvert $D(a)$ (1.10). Comme les ouverts $D(a)$, $a \in A$, forment une base de la topologie de X , il suffira de montrer que le préfaisceau \mathcal{F} est déjà un faisceau sur cette base, c'est-à-dire que l'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(D(a)) \rightarrow \prod_i \mathcal{F}(D(a_i)) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(D(a_i a_j))$$

chaque fois que $D(a)$ est réunion d'ouverts $D(a_i)$. Puisque tous les ouverts $D(a)$ sont quasi-compacts (1.10), il suffit de le montrer pour les recouvrements finis. Notons qu'ici $S(D(a))$ est constitué des éléments de A qui divisent un élément de $\{1, a, a^2, \dots\}$, et donc que le morphisme canonique $A_a \rightarrow \mathcal{F}(D(a))$ est un isomorphisme. Puisque $D(a_i) = D(a) \cap D(a_i) = D(aa_i)$, le diagramme ci-dessus devient

$$0 \rightarrow A_a \rightarrow \prod_i A_{aa_i} \rightrightarrows \prod_{i,j} A_{aa_i a_j}.$$

Si l'on pose $C = A_a$, $B = \prod_i A_{aa_i}$, alors cette suite s'identifie à la suite

$$0 \rightarrow C \rightarrow C \otimes_C B \rightarrow C \otimes_C B \otimes_C B$$

dont les flèches sont données par $c \mapsto c \otimes 1$ et $c \otimes b \mapsto c \otimes b \otimes 1 - c \otimes 1 \otimes b$. De plus, B est une C -algèbre fidèlement plate. En effet, elle est plate car la localisation par a_i est un foncteur exact $\text{Mod}_C \rightarrow \text{Mod}_C$ et le produit tensoriel commute aux produits finis; d'autre part, si \mathfrak{m} est un idéal maximal de C , sachant que $D(a)$ est recouvert par les $D(a_i)$, il existe un indice i tel que $a_i/1 \notin \mathfrak{m}$, et on en déduit que $\mathfrak{m}B \neq B$. Il suffit alors d'appliquer le lemme suivant en y posant $M = C$. \square

1.12 Lemme. Soient C un anneau, M un C -module et B une C -algèbre fidèlement plate. Alors le complexe cosimplicial augmenté de C -modules

$$M \rightarrow M \otimes_C B \rightarrow M \otimes_C B \otimes_C B \rightarrow M \otimes_C B \otimes_C B \otimes_C B \rightarrow \cdots,$$

dont l'augmentation est $m \mapsto m \otimes 1$ et dont les opérations cosimpliciales sont définies par

$$\begin{aligned} \delta^i(m \otimes b_0 \otimes \cdots \otimes b_{n-1}) &= m \otimes b_0 \otimes \cdots \otimes b_{i-1} \otimes 1 \otimes b_i \otimes \cdots \otimes b_{n-1} \text{ et} \\ \sigma^i(m \otimes b_0 \otimes \cdots \otimes b_{n+1}) &= m \otimes b_0 \otimes \cdots \otimes b_i b_{i+1} \otimes \cdots \otimes b_{n+1} \end{aligned}$$

pour $0 \leq i \leq n$, est une résolution de M .

Démonstration. Puisque B est fidèlement plate, il suffit de montrer que la suite tensorisée

$$0 \rightarrow M \otimes_C B \xrightarrow{d^0 \otimes \text{id}_B} M \otimes_C B \otimes_C B \xrightarrow{d^1 \otimes \text{id}_B} M \otimes_C B \otimes_C B \otimes_C B \rightarrow \cdots$$

est contractile. Or, si on pose $\Sigma^n(m \otimes b_0 \otimes \cdots \otimes b_{n+1}) = (-1)^n(m \otimes b_0 \otimes \cdots \otimes b_n b_{n+1})$, on obtient $\Sigma^{n+1}(d^n \otimes \text{id}_B) + (d^{n-1} \otimes \text{id}_B)\Sigma^n = \text{id}$ pour tout $n \geq 0$ par un calcul direct. \square

1.13 Si $\varphi: A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, le morphisme $\text{Spec } \varphi = (\varepsilon_B \varphi)^b$ peut s'explicitier comme suit. Si $x \in \text{Spec } B$, $(\text{Spec } \varphi)(x)$ est l'image réciproque de x par φ . Il s'ensuit que si U est un ouvert de $\text{Spec } A$, on a $\varphi(S(U)) \subset S((\text{Spec } \varphi)^{-1}(U))$. Si \mathcal{F} et \mathcal{G} désignent les préfaisceaux d'anneaux sur $\text{Spec } A$ et $\text{Spec } B$ décrits dans 1.9, le morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_{\text{Spec } \varphi}$ est associé au morphisme de préfaisceaux $\mathcal{F} \rightarrow (\text{Spec } \varphi)_*(\mathcal{G})$ défini par les morphismes $S(U)^{-1}A \rightarrow S((\text{Spec } \varphi)^{-1}(U))^{-1}B$ induits par φ . On déduit de là que les morphismes induits par $\text{Spec } \varphi$ sur les fibres s'identifient aux morphismes $A_{\varphi^{-1}(x)} \rightarrow B_x$ induits par φ .

1.14 Soit $\varphi: A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Si P est une partie de $\text{Spec } A$, son adhérence dans $\text{Spec } A$ est égale à $V(\bigcap_{x \in P} x)$. En effet, si l'on pose $\mathfrak{a} = \bigcap_{x \in P} x$, alors $P \subset V(\mathfrak{a})$ si et seulement si $E \subset \mathfrak{a}$, d'où les égalités $\overline{P} = \bigcap_{E \subset \mathfrak{a}} V(E) = V(\bigcup_{E \subset \mathfrak{a}} E) = V(\mathfrak{a})$.

Si \mathfrak{a} est un idéal de B , on en déduit que l'adhérence de $(\text{Spec } \varphi)(V(\mathfrak{a}))$ dans $\text{Spec } A$ est $V(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}))$. Cela découle des égalités $\bigcap_{x \in V(\mathfrak{a})} \varphi^{-1}(x) = \varphi^{-1}(\bigcap_{x \in V(\mathfrak{a})} x) = \varphi^{-1}(\mathfrak{r}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{r}(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}))$ et du fait que $V(\mathfrak{r}(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}))) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}))$. En particulier, l'application continue $\text{Spec } \varphi$ est dominante si et seulement si $V(\ker \varphi) = A$, ce qui revient à dire (1.10) que $\ker \varphi$ est un nilidéal.

1.15 Proposition. Soit $\varphi: A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Pour que $\text{Spec } \varphi$ soit une immersion fermée (1.5), il faut et il suffit que φ soit surjectif.

Démonstration. Si φ est surjectif, $x \mapsto \varphi^{-1}(x)$ est une bijection de $\text{Spec } B$ sur $V(\ker \varphi)$ préservant l'inclusion, et donc $\text{Spec } \varphi$ se factorise en

$$\text{Spec } B \xrightarrow{f} V(\ker \varphi) \hookrightarrow \text{Spec } A$$

où f est un homéomorphisme. De plus, les morphismes $A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$ induits par φ sont surjectifs. Inversément, supposons que $\text{Spec } \varphi$ soit une immersion fermée. Si l'on factorise φ en $A \twoheadrightarrow A/\ker \varphi \twoheadrightarrow B$, on obtient une factorisation de $\text{Spec } \varphi$ en

$$\text{Spec } B \xrightarrow{f} \text{Spec}(A/\ker \varphi) \twoheadrightarrow \text{Spec } A$$

où la première flèche est dominante (1.14) et la deuxième flèche est une immersion fermée par ce qu'on vient de démontrer. Puisque la composition est une immersion fermée, f est un homéomorphisme sur son image et $f(\text{Spec } B)$ est fermé dans $\text{Spec}(A/\ker \varphi)$; donc f est un homéomorphisme. Puisque $\mathcal{O}_{\text{Spec } \varphi, x}^\sharp$ est un morphisme surjectif pour tout $x \in \text{Spec } B$ et qu'il se factorise à travers $\mathcal{O}_{f, x}^\sharp$, ce dernier est aussi surjectif. Ainsi, \mathcal{O}_f est un épimorphisme. D'autre part, l'injectivité de $A/\ker \varphi \twoheadrightarrow B$ implique que les morphismes $\mathcal{O}_{f, U}$ sont injectifs pour tout ouvert U de $\text{Spec}(A/\ker \varphi)$, car il en est ainsi des morphismes $S(U)^{-1}(A/\ker \varphi) \rightarrow S(f^{-1}(U))^{-1}B$. Par conséquent, f est un isomorphisme, et comme le foncteur Spec est pleinement fidèle, $A/\ker \varphi \rightarrow B$ est un isomorphisme. \square

1.16 Proposition. *Soit A un anneau, S une partie de A , $\varphi: A \rightarrow S^{-1}A$ le morphisme canonique et P la partie de $\text{Spec } A$ dont les éléments sont disjoints de S . Alors $\text{Spec } \varphi$ induit un isomorphisme d'espaces géométriques entre $\text{Spec}(S^{-1}A)$ et P .*

Démonstration. Puisque la correspondance $x \mapsto \varphi^{-1}(x)$ est une bijection de $\text{Spec}(S^{-1}A)$ sur P préservant l'inclusion, $\text{Spec } \varphi$ se factorise en

$$\text{Spec}(S^{-1}A) \xrightarrow{f} P \hookrightarrow \text{Spec } A$$

où f est un homéomorphisme. Pour voir que f est un isomorphisme, il suffit donc de vérifier que les morphismes $\mathcal{O}_{f,x}^\sharp: \mathcal{O}_{P,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec}(S^{-1}A),x}$ induits sur les fibres sont des isomorphismes. En vertu de 1.4 et 1.13, ces morphismes s'identifient aux isomorphismes canoniques $A_{\varphi^{-1}(x)} \xrightarrow{\sim} (S^{-1}A)_x$. \square

1.17 On appelle *schéma affine* tout espace géométrique X pour lequel l'unité $\eta_X = (\text{id}_{\mathcal{O}(X)})^\flat$ de l'adjonction $\mathcal{O}^\circ, \text{Spec}: \mathbf{Esg} \rightleftarrows \mathbf{An}^\circ$ (1.9) est un isomorphisme. Il est équivalent de dire qu'il existe un isomorphisme d'espaces annelés $f: X \rightarrow \text{Spec } A$ pour un certain anneau A , car on déduit alors des propriétés générales des adjonctions que η_X est l'inverse de $f^{-1} \text{Spec}(\mathcal{O}(f)_{\varepsilon_A})$. Comme la counité ε est un isomorphisme, Spec et \mathcal{O}° induisent des équivalences quasi-inverses entre \mathbf{An}° et la sous-catégorie pleine de \mathbf{Esg} formée des schémas affines. Si T est un schéma affine, le théorème 1.9 montre que la catégorie $(\mathbf{Esg} \downarrow T)$ des espaces géométriques au-dessus de T est isomorphe à celle des espaces géométriques dont l'anneau des sections globales est muni d'une structure de $\mathcal{O}(T)$ -algèbre, avec les morphismes évidents.

Un ouvert U d'un espace annelé X est appelé un *ouvert affine* de X si U , muni du faisceau d'anneau $\mathcal{O}_X|_U$, est un schéma affine.

1.18 Soit $\mathfrak{M} \subset \text{Ob } \mathbf{Esg}$ une collection d'espaces géométriques. On appelle *variété de type \mathfrak{M}* tout espace géométrique admettant un recouvrement par des ouverts isomorphes à des éléments de \mathfrak{M} . Lorsque l'on prend pour éléments de \mathfrak{M} les schémas affines, une variété de type \mathfrak{M} est appelée un *schéma*. On note \mathbf{Sch} la sous-catégorie pleine de \mathbf{Esg} formée des schémas. Si T est un espace géométrique, on note $(\mathbf{Sch} \downarrow T)$ la sous-catégorie pleine correspondante de $(\mathbf{Esg} \downarrow T)$, dont les objets sont appelés *T -schémas*, ou, lorsque $T = \text{Spec } A$, *A -schémas*.

Si X est un schéma, les ouverts affines de X forment une base de la topologie de X car on sait déjà (1.10 et 1.16) que c'est le cas lorsque X est un schéma affine. On en déduit que si U est une partie ouverte de X , U est aussi un schéma, et plus généralement que si $X \hookrightarrow Y$ est une immersion ouverte d'espaces annelés et Y est un schéma, X est aussi un schéma.

1.19 Proposition. *Soit X un schéma. L'application $x \mapsto \overline{\{x\}}$ est une bijection de l'ensemble des points de X sur l'ensemble des parties fermées irréductibles de X .*

Démonstration. On le montre dans un premier temps lorsque $X = \text{Spec } A$. Dans ce cas, l'adhérence de $\{x\}$ dans X n'est autre que $V(x)$, l'ensemble des idéaux premiers de A contenant x (1.14). On sait déjà (1.10) que V est une bijection entre les idéaux \mathfrak{a} de A tels que $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ et les parties fermées de X . Il s'agit donc de montrer, sous l'hypothèse $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$, que $V(\mathfrak{a})$ est irréductible si et seulement si \mathfrak{a} est premier. Supposons $V(\mathfrak{a})$ irréductible. Si $fg \in \mathfrak{a}$, alors $V(\mathfrak{a}) \subset V(f) \cup V(g)$, d'où $V(\mathfrak{a}) \subset V(f)$ ou $V(\mathfrak{a}) \subset V(g)$. L'un de f et g appartient donc à $\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, ce qui montre que \mathfrak{a} est premier. Réciproquement, supposons $V(\mathfrak{a})$ réductible, c'est-à-dire qu'il existe des idéaux \mathfrak{b} et \mathfrak{c} , égaux à leurs racines et contenant \mathfrak{a} strictement, tels que $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \cup V(\mathfrak{c})$. Si on prend $f \in \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$ et $g \in \mathfrak{c} - \mathfrak{a}$, on a $V(fg) \supset V(\mathfrak{a})$ et par conséquent $fg \in \mathfrak{a}$. Ceci montre que \mathfrak{a} n'est pas premier.

Passons maintenant au cas général. Soit Y une partie fermée irréductible de X . Il s'agit de montrer que Y possède un unique point générique, c'est-à-dire un point x tel que $Y = \overline{\{x\}}$. Soit U un ouvert affine tel que $U \cap Y$ soit non vide. Alors $U \cap Y$ est une partie fermée irréductible de U , donc possède un unique point générique x dans \overline{U} par ce qui précède. D'autre part, $U \cap Y$ est dense dans Y car Y est irréductible, et par suite $\overline{\{x\}} = Y$. L'unicité de x provient de ce que deux points distincts d'un schéma n'ont pas le même filtre de voisinages, comme on le vérifie immédiatement dans le cas d'un schéma affine. \square

En particulier, si X est un schéma irréductible, c'est-à-dire si l'espace topologique sous-jacent à X est irréductible, alors X possède un unique point générique ξ . L'anneau local $\mathcal{O}_{X,\xi}$ s'appelle l'anneau des fonctions sur X .

Corollaire. *Soit A un anneau. L'espace topologique $\text{Spec } A$ est irréductible si et seulement si le nilradical de A est premier.*

Démonstration. Puisque la bijection $x \mapsto V(x)$ entre $\text{Spec } A$ et l'ensemble des parties fermées irréductibles de $\text{Spec } A$ inverse les inclusions, les idéaux premiers minimaux de A correspondent aux composantes irréductibles de $\text{Spec } A$. Donc $\text{Spec } A$ est irréductible si et seulement si A possède un unique idéal premier minimal, qui doit être le nilradical de A . \square

1.20 Un schéma X est *réduit* si pour tout ouvert U de X , $\mathcal{O}_X(U)$ est un anneau réduit, c'est-à-dire dont les éléments non nuls ne sont pas nilpotents. Il est *intègre* si pour tout ouvert non vide U de X , $\mathcal{O}_X(U)$ est un anneau intègre.

Proposition. *Un schéma est intègre si et seulement s'il est irréductible et réduit.*

Démonstration. Puisqu'un anneau intègre est réduit, tout schéma intègre est réduit. Si X est un schéma réductible, alors X possède deux ouverts disjoints non vides U et V , et $\mathcal{O}_X(U \cup V) = \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{O}_X(V)$ par la théorie des faisceaux; X étant un espace géométrique, les anneaux $\mathcal{O}_X(U)$ et $\mathcal{O}_X(V)$ ne sont pas réduits à 0, donc X n'est pas intègre. Il reste à montrer que si X est un schéma réduit et irréductible, alors X est aussi intègre. Soit $U \subset X$ un ouvert non vide. Soient s et t des sections de \mathcal{O}_X au-dessus de U telles que $st = 0$. Alors l'ouvert $U_s \cap U_t$ est vide. Puisque U est irréductible, on peut supposer que U_s est vide, c'est-à-dire que $s(x) = 0$ pour tout $x \in U$. Si $V \subset U$ est un ouvert affine, l'ouvert $V_{s|V} = V \cap U_s$ est vide et donc $s|V$ est nilpotent (1.10). Puisque X est réduit, $s|V = 0$. Comme U peut être recouvert par des ouverts affines et comme \mathcal{O}_X est un faisceau, on obtient $s = 0$. Ceci montre que $\mathcal{O}_X(U)$ est un anneau intègre. \square

Soit X un schéma intègre et ξ son point générique. Alors $\mathcal{O}_{X,\xi}$ est un corps. En effet, si U est un ouvert affine non vide de X , ξ est aussi un point générique de U et donc $\eta_U(\xi)$ est l'idéal (0) de $\mathcal{O}_X(U)$. L'anneau $\mathcal{O}_{X,\xi}$ s'identifie donc au corps des fractions $\mathcal{O}_X(U)_{(0)}$ de $\mathcal{O}_X(U)$.

1.21 Un schéma affine X est dit *noethérien* si $\mathcal{O}(X)$ est un anneau noethérien. On voit immédiatement en utilisant la correspondance entre les fermés de X et les idéaux de $\mathcal{O}(X)$ que l'espace topologique sous-jacent à un schéma affine noethérien est noethérien. Si \mathfrak{M} désigne la collection des schémas affines noethériens, une variété de type \mathfrak{M} (1.18) est appelée un *schéma localement noethérien*; c'est bien sûr un schéma, et son espace topologique sous-jacent est localement noethérien.

Lemme. *Soit A un anneau et a_1, \dots, a_r des éléments de A tels que $(a_1, \dots, a_r) = A$. Alors A est noethérien si et seulement si A_{a_i} est noethérien pour tout i .*

Démonstration. La nécessité est claire. Pour montrer l'assertion réciproque, on note dans un premier temps que si \mathfrak{a} est un idéal de A , alors

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^r \alpha_i^{-1}((\alpha_i(\mathfrak{a}))), \quad (3)$$

où $\alpha_i: A \rightarrow A_{a_i}$ est le morphisme canonique. En effet, si $\alpha_i(a) \in (\alpha_i(\mathfrak{a}))$ pour tout i , on peut écrire $\alpha_i(a) = b_i/a_i^n$ pour un certain $b_i \in \mathfrak{a}$ et pour un entier $n \geq 0$. On peut donc trouver un entier $m \geq 0$ tel que $a_i^m(a_i^n a - b_i) = 0$ pour tout i . En particulier, $a_i^{m+n} a \in \mathfrak{a}$ pour tout i . Comme $D(a_1, \dots, a_r) = D(a_1^{n+m}, \dots, a_r^{n+m})$, on a $(a_1^{n+m}, \dots, a_r^{n+m}) = A$. Soient c_1, \dots, c_r des éléments de A tels que $1 = \sum c_i a_i^{n+m}$. Alors $a = \sum c_i a_i^{n+m} a \in \mathfrak{a}$. L'autre inclusion de (3) est triviale.

Prenons maintenant une chaîne croissante $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \dots$ d'idéaux de A . Comme A_{a_i} est noethérien, il existe un entier n_i tel que $(\alpha_i(\mathfrak{a}_k)) = (\alpha_i(\mathfrak{a}_{n_i}))$ pour tout $k \geq n_i$. Si n est plus grand que tous les n_i et si $k \geq n$, on a en vertu de (3) $\mathfrak{a}_k = \bigcap \alpha_i^{-1}((\alpha_i(\mathfrak{a}_k))) = \bigcap \alpha_i^{-1}((\alpha_i(\mathfrak{a}_n))) = \mathfrak{a}_n$, ce qui montre que A est noethérien. \square

Proposition. *Si X est un schéma localement noethérien et si $U \subset X$ est un ouvert affine, alors $\mathcal{O}_X(U)$ est un anneau noethérien.*

Démonstration. Si X est un schéma affine noethérien, alors la topologie de X admet une base formée d'ouverts affines qui sont des schémas affines noethériens, en vertu de la proposition 1.11. On en déduit que c'est encore vrai si X est un schéma localement noethérien. Si $U \subset X$ un ouvert affine, on peut donc le recouvrir par des ouverts affines qui sont des schémas affines noethériens. Puisque les ouverts spéciaux de U forment une base de la topologie de U , il existe un recouvrement plus fin formé d'ouverts spéciaux de U , dont on peut extraire un recouvrement fini $(U_{s_i})_{1 \leq i \leq r}$ car U est quasi-compact (1.10). Si $U_{s_i} \subset V \subset U$ où V est un schéma affine noethérien, alors $\mathcal{O}_X(U_{s_i})$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X(V)_{s_i|V}$; donc les U_{s_i} sont des schémas affines noethériens. Sachant que $(s_1, \dots, s_r) = \mathcal{O}_X(U)$ (1.10) et que $\mathcal{O}_X(U_{s_i}) \cong \mathcal{O}_X(U)_{s_i}$ (1.11), le lemme montre que $\mathcal{O}_X(U)$ est noethérien. \square

Un schéma est *noethérien* s'il est localement noethérien et quasi-compact; dans ce cas X est un espace topologique noethérien. La proposition ci-dessus et le fait que tout schéma affine est quasi-compact (1.10) montrent que cette notion coïncide avec celle déjà vue pour les schémas affines.

1.22 Proposition. *Tout diagramme de recollement $d: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Sch}$ (1.8) admet une limite inductive, qui n'est autre que la limite inductive du diagramme dans \mathbf{Esa} .*

Démonstration. Soit X la limite inductive de d dans \mathbf{Esa} . On sait que X est aussi limite inductive de d dans \mathbf{Esg} (1.7). Puisque \mathbf{Sch} est une sous-catégorie pleine de \mathbf{Esg} , il reste à voir que X est un schéma. Mais ceci se déduit immédiatement du fait que les morphismes canoniques $d_i \rightarrow X$ sont des immersions ouvertes (1.8) dont les images recouvrent X . \square

Comme cas particulier de cette proposition, sachant que le schéma vide est un objet initial aussi bien dans \mathbf{Esa} que dans \mathbf{Sch} , on obtient que la somme dans \mathbf{Sch} d'une famille de schémas existe et n'est autre que la somme de cette famille dans \mathbf{Esa} .

1.23 Proposition. *Soient \mathbf{C} l'une des catégories \mathbf{Esa} et \mathbf{Esg} et*

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{p} & X \\ q \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

un carré cartésien dans \mathbf{C} . Soient U, V et W des parties de X, Y et Z respectivement, vérifiant $f(U) \subset W$ et $g(V) \subset W$, et soit $S = p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$. Alors le carré induit

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{r} & U \\ s \downarrow & & \downarrow t \\ V & \xrightarrow{u} & W \end{array}$$

est cartésien dans \mathbf{C} .

Démonstration. Explicitons d'abord les morphismes formant le second carré. Si $i: U \rightarrow X$, $j: V \rightarrow Y$, $k: W \rightarrow Z$ et $l: S \rightarrow T$ sont les morphismes d'inclusion, r, s, t et u sont les uniques morphismes vérifiant $p|_S = ir$, $q|_S = js$, $f|_U = kt$ et $g|_V = ku$. Soient maintenant R un objet de \mathbf{C} et $v: R \rightarrow U$, $w: R \rightarrow V$ des morphismes tels que $tv = uw$, et soit $n: R \rightarrow T$ le morphisme de composantes iv et kw . Alors $n(R) \subset S$ car $pn(R) \subset U$ et $qn(R) \subset V$, et donc il existe un morphisme $m: R \rightarrow S$ tel que $n = lm$. En outre, on a $irm = (p|_S)m = plm = pn = iv$ et donc $rm = v$ car i est un monomorphisme. De même, $sm = w$. Ce calcul montre aussi que si m' vérifie $rm' = v$ et $sm' = w$, alors $plm' = pn$ et $qlm' = qn$, d'où $n = lm'$ et finalement $m = m'$ car l est un monomorphisme. \square

1.24 Nous nous intéressons maintenant à l'existence des limites projectives.

Lemme. *Soit \mathcal{C} l'une des catégories \mathbf{Esa} et \mathbf{Esg} . Soient $f: X \rightarrow S$ et $g: Y \rightarrow S$ des morphismes de \mathcal{C} et $(X_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . Supposons pour chaque i l'existence d'un objet R_i qui soit produit fibré dans \mathcal{C} des morphismes $f|_{X_i}$ et g . Alors le produit fibré de f et de g existe dans \mathcal{C} . De plus, c'est un schéma si les R_i sont des schémas.*

Démonstration. Notons $X_{ij} = X_i \cap X_j$, $X_{ijk} = X_i \cap X_j \cap X_k$, $p_i: R_i \rightarrow X_i$ et $q_i: R_i \rightarrow Y$ les projections canoniques, $R_{ij} = p_i^{-1}(X_{ij})$, $R_{ijk} = p_i^{-1}(X_{ijk})$, $p_{ij}: R_{ij} \rightarrow X_{ij}$ et $p_{ijk}: R_{ijk} \rightarrow X_{ijk}$ les morphismes induits par p_i , $q_{ij}: R_{ij} \rightarrow Y$ et $q_{ijk}: R_{ijk} \rightarrow Y$ les morphismes induits par q_i , et finalement $f_i: X_i \rightarrow S$ et $f_{ij}: X_{ij} \rightarrow S$ les morphismes induits par f . Par la proposition 1.23, R_{ij} est un produit fibré de X_{ij} et Y au-dessus de S . Puisque $X_{ij} = X_{ji}$, il existe des isomorphismes uniquement déterminés $\varphi_{ij}: R_{ij} \xrightarrow{\sim} R_{ji}$ tels que $q_{ji}\varphi_{ij} = q_{ij}$ et $p_{ji}\varphi_{ij} = p_{ij}$. De même, R_{ijk} est un produit fibré de X_{ijk} et Y au-dessus de S , et donc il existe des isomorphismes uniquement déterminés $\varphi_{ijk}: R_{ijk} \xrightarrow{\sim} R_{jki}$ tels que $q_{jki}\varphi_{ijk} = q_{ijk}$ et $p_{jki}\varphi_{ijk} = p_{ijk}$. On en déduit immédiatement que $\varphi_{jki}\varphi_{ijk} = \varphi_{ikj}$. Comme φ_{ij} est un morphisme au-dessus de X_{ij} , il induit un morphisme $R_{ijk} \rightarrow R_{jki}$ qui satisfait nécessairement les mêmes relations que φ_{ijk} , donc lui est égal.

Toutes ces données définissent donc un diagramme de recollement $d: \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{C}$ (1.8). Soit $e: \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{C}$ le diagramme de recollement formé par les ouvert X_i et X_{ij} , dont la limite inductive est X (1.8), et soit $\varphi: e \rightarrow S$ le cône formé par les f_i et les f_{ij} , dont la limite inductive est f . Par construction, les morphismes p_i et p_{ij} forment un morphisme de diagrammes $\pi: d \rightarrow e$ et les morphismes q_i et q_{ij} forment un cône $\kappa: d \rightarrow Y$. On prétend que le carré

$$\begin{array}{ccc} d & \xrightarrow{\pi} & e \\ \kappa \downarrow & & \downarrow \varphi \\ Y & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

est cartésien dans la catégorie des diagrammes de domaine $\mathbb{1}$ à valeurs dans \mathcal{C} (Y et S étant bien sûr des diagrammes constants). Par la proposition 1.8, il suffit de montrer qu'étant donné un recouvrement ouvert $(T_i)_{i \in I}$ d'un objet T et des morphismes $r: T \rightarrow X$ et $s: T \rightarrow Y$ tels que $fr = gs$ et induisant $r_i: T_i \rightarrow X_i$, $r_{ij}: T_{ij} \rightarrow X_{ij}$, $s_i: T_i \rightarrow Y$ et $s_{ij}: T_{ij} \rightarrow Y$, où $T_{ij} = T_i \cap T_j$, les morphismes $t_i: T_i \rightarrow R_i$ de composantes r_i et s_i et les morphismes $t_{ij}: T_{ij} \rightarrow R_{ij}$ de composantes r_{ij} et s_{ij} forment un morphisme de diagramme. On vérifie comme ci-dessus que les t_{ij} sont induits par les t_i et il reste à montrer que $\varphi_{ij}t_{ij} = t_{ji}$, ce qu'on vérifie sur chaque composante : $p_{ji}\varphi_{ij}t_{ij} = p_{ij}t_{ij} = r_{ij} = r_{ji} = p_{ji}t_{ji}$ et $q_{ji}\varphi_{ij}t_{ij} = q_{ij}t_{ij} = s_{ij} = s_{ji} = q_{ji}t_{ji}$.

Soient $R = \varinjlim d$, $p = \varinjlim \pi$ et $q = \varinjlim \kappa$. Vérifions qu'alors le carré

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{p} & X \\ q \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

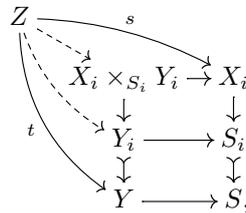
est cartésien dans \mathcal{C} . Soit T un objet de \mathcal{C} et $r: T \rightarrow X$, $s: T \rightarrow Y$ des morphismes tels que $fr = gs$. Notons $T_i = r^{-1}(X_i)$, $T_{ij} = r^{-1}(X_{ij})$, et soit $c: \mathbb{1} \rightarrow \mathbf{Esg}$ le diagramme de recollement défini par les T_i et les T_{ij} dont la limite inductive est T . Alors r et s induisent des morphismes $\rho: c \rightarrow e$ et $\sigma: c \rightarrow Y$ tels que $\varphi\rho = g\sigma$. Par suite, il existe un unique morphisme $\tau: c \rightarrow d$ tel que $\pi\tau = \rho$ et $\kappa\tau = \sigma$. Si $t = \varinjlim \tau$, on a donc $pt = r$ et $qt = s$. De plus, t est l'unique morphisme satisfaisant ces relations, car tout morphisme $t': T \rightarrow R$ tel que $pt' = r$ et $qt' = s$ provient d'un morphisme $\tau': c \rightarrow d$ tel que $\pi\tau' = \rho$ et $\kappa\tau' = \sigma$. Finalement, si les R_i sont des schémas, alors d est un diagramme de schémas, donc R est un schéma (1.22). \square

Proposition. *La catégorie \mathbf{Sch} admet des limites projectives finies. Ces limites coïncident avec celles prises dans \mathbf{Esg} .*

Démonstration. Comme toutes les limites projectives finies s'obtiennent à partir de produits fibrés, on peut se restreindre à montrer l'existence du produit fibré de deux morphismes de schémas $f: X \rightarrow S$ et $g: Y \rightarrow S$. Puisque **Sch** est une sous-catégorie pleine de **Esg**, il suffit de montrer que ce produit fibré existe dans **Esg** et est un schéma. Si $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$ et $S = \text{Spec } C$, l'adjonction du théorème 1.9 montre que le schéma $Z = \text{Spec}(A \otimes_C B)$, avec les morphismes $\text{Spec } i_1: Z \rightarrow \text{Spec } A$ et $\text{Spec } i_2: Z \rightarrow \text{Spec } B$, est un produit fibré de f et g dans **Esg**. Dans la suite tous les produits fibrés sont pris dans **Esg**.

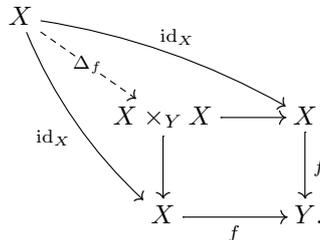
Supposons maintenant que X et Y soient quelconques et que S soit affine. Soit $(X_i)_{i \in I}$ (resp. $(Y_j)_{j \in J}$) un recouvrement de X (resp. de Y) par des ouverts affines. Par ce qui précède et par le lemme, le produit fibré $X \times_S Y_j$ existe pour tout $j \in J$ et est un schéma; par une nouvelle application du lemme, le produit fibré $X \times_S Y$ existe et est un schéma.

Finalement, prenons X , Y et S quelconques et soit $(S_i)_{i \in I}$ un recouvrement de S par des ouverts affines. Notons $X_i = f^{-1}(S_i)$ et $Y_i = g^{-1}(S_i)$. Alors le produit fibré $X_i \times_{S_i} Y_i$ existe par ce qui précède, et c'est un schéma. Soit Z un espace géométrique et $s: Z \rightarrow X_i$ et $t: Z \rightarrow Y$ des morphismes au-dessus de S . Alors $t(Z) \subset Y_i$ comme on le voit en contemplant le diagramme



lequel nous permet aussi de conclure que $X_i \times_{S_i} Y_i$ est un produit fibré de X_i et Y au-dessus de S . Par une dernière application du lemme on obtient le produit fibré $X \times_S Y$, et c'est un schéma. \square

1.25 Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. Le morphisme diagonal Δ_f est défini par le diagramme



On dit que f est *quasi-compact* si l'application continue sous-jacente à f est quasi-compacte, c'est-à-dire si la préimage par f de tout ouvert quasi-compact de Y est quasi-compacte. Si \mathfrak{B} est une base de la topologie de Y formée d'ouverts quasi-compacts, il revient au même de dire que la préimage de tout élément de \mathfrak{B} est quasi-compacte. Par exemple, tout morphisme de schémas affines $f: X \rightarrow Y$ est quasi-compact car la préimage d'un ouvert spécial Y_s est l'ouvert spécial $X_{\theta(f)(s)}$. On dit que f est *quasi-séparé* si le morphisme diagonal Δ_f est quasi-compact et *séparé* si le morphisme diagonal Δ_f est une immersion fermée. On dit que f est *concentré* s'il est à la fois quasi-compact et quasi-séparé. On dit aussi qu'un schéma X est quasi-séparé, concentré ou séparé si l'unique morphisme $X \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}$ l'est.

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de Y et notons $f_i: f^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ les morphismes induits par f . Il est clair que pour que f soit quasi-compact, il faut et il suffit que tous les f_i le soient. Notons $p, q: X \times_Y X \rightarrow X$ les projections canoniques. Pour tout i , $p^{-1}(f^{-1}(U_i)) = q^{-1}(f^{-1}(U_i))$ est un produit fibré du diagramme $f^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \leftarrow f^{-1}(U_i)$ (1.23), et il résulte de la preuve de 1.23 que le morphisme $\Delta_{f_i}: f^{-1}(U_i) = \Delta_f^{-1}(p^{-1}(f^{-1}(U_i))) \rightarrow p^{-1}(f^{-1}(U_i))$ est induit par Δ_f . Ainsi, Δ_f est quasi-compact ou une immersion fermée si et seulement si les Δ_{f_i} le sont. Autrement dit, pour que f soit quasi-séparé, concentré ou séparé, il faut et il suffit que les f_i le soient.

Les assertions suivantes sont claires : toute immersion fermée est quasi-compacte ; le composé de deux morphismes quasi-compacts est quasi-compact ; tout morphisme séparé est quasi-séparé ;

si X est un schéma dont l'espace sous-jacent est noethérien, alors tout morphisme de domaine X est concentré. Puisque Δ_f est un isomorphisme si et seulement si f est un monomorphisme, les monomorphismes de schémas sont séparés. En particulier, toute immersion est séparée.

1.26 Proposition. *Soient S un schéma affine et $f: X \rightarrow S$ un morphisme de schémas quasi-séparé. Si U et V sont des ouverts quasi-compacts de X , alors $U \cap V$ est quasi-compact.*

Démonstration. Notons d'abord que le produit fibré de deux schémas quasi-compacts X et Y au-dessus d'un schéma affine S est quasi-compact. En effet, on peut recouvrir X et Y par des ouverts affines U_i et V_j en nombre fini. Alors $p^{-1}(U_i) \cap q^{-1}(V_j)$ est un produit fibré de U_i et V_j au-dessus de S (1.23), donc est affine et en particulier quasi-compact. Donc $X \times_S Y$ est réunion finie d'ouverts quasi-compacts.

Soient $p, q: X \times_S X \rightarrow X$ les projections et $W = p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$; c'est un produit fibré de U et V au-dessus de S (1.23) donc un ouvert quasi-compact par ce qui précède. Mais $\Delta_f^{-1}(W) = U \cap V$ car $p\Delta_f = q\Delta_f = \text{id}$; Δ_f étant quasi-compact par hypothèse, $U \cap V$ est quasi-compact. \square

1.27 Tout morphisme de schémas affines est séparé. En effet, si $\varphi: A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, le morphisme diagonal $\Delta_{\text{Spec } \varphi}$ n'est autre que le morphisme $\text{Spec}(\Delta_\varphi)$ où $\Delta_\varphi: B \otimes_A B \rightarrow B$ est le morphisme induit par le cône $B \rightarrow B \leftarrow B$ dont les flèches sont les identités. Ce dernier étant surjectif, $\Delta_{\text{Spec } \varphi}$ est une immersion fermée (1.15). En particulier, tout morphisme de schémas affines est concentré.

1.28 Proposition. *Pour tout morphisme de schémas $f: X \rightarrow Y$, Δ_f est une immersion localement fermée.*

Démonstration. Soient $p, q: X \times_Y X \rightarrow X$ les projections canoniques. La relation $p\Delta_f = \text{id}_X$ implique que Δ_f est un homéomorphisme sur son image, et aussi que $\mathcal{O}_{\Delta_f, x}^\sharp: \mathcal{O}_{X \times_Y X, \Delta_f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ est surjectif pour tout $x \in X$. En vertu du critère énoncé en 1.5, il reste à voir que $\Delta_f(X)$ est localement fermé dans Y . Soit donc $y = \Delta_f(x)$ un point de $\Delta_f(X)$, et soient U et V des voisinages ouverts affines de x et de $f(x)$ tels que $f(U) \subset V$. Posons $W = p^{-1}(U) \cap q^{-1}(U)$; c'est un voisinage de y . On prétend que $\Delta_f(X) \cap W = \Delta_f(U)$ est fermé dans W . Par la proposition 1.23, W est un produit fibré de U avec U au-dessus de V , et le morphisme diagonal $U \rightarrow W$ est induit par $\Delta_f|_U$. Or, $U \rightarrow W$ est une immersion fermée (1.27). En particulier, $\Delta_f(U)$ est fermé dans W . \square

Un morphisme de schéma $f: X \rightarrow Y$ est donc séparé si et seulement si $\Delta_f(X)$ est fermé dans $X \times_Y X$.

§2 Modules quasi-cohérents

2.1 Soit X un espace annelé. On appelle X -module tout faisceau de modules sur le faisceau structural \mathcal{O}_X , et X -prémodule tout préfaisceau de modules sur \mathcal{O}_X . La catégorie abélienne des X -modules (resp. des X -prémodules) est notée Mod_X (resp. Mod_X^-). On rappelle dans ce paragraphe et dans le suivant des propriétés élémentaires des faisceaux de modules supposées connues. On note $\Gamma(X, ?)$ (resp. $\Gamma^-(X, ?)$) le foncteur additif des sections globales $\text{Mod}_X \rightarrow \text{Mod}_{\mathcal{O}(X)}$ (resp. $\text{Mod}_X^- \rightarrow \text{Mod}_{\mathcal{O}(X)}$). Il est évident que $\Gamma^-(X, ?)$ commute à toutes les limites. Le foncteur $\Gamma(X, ?)$ commute lui aux limites projectives : c'est en effet le cas du foncteur des sections globales de faisceaux de groupes abéliens, car il est adjoint à droite au foncteur associant à un groupe abélien A le faisceau simple de fibre A , et le foncteur oubli $\text{Mod}_X \rightarrow \text{Ab}_X$ crée toutes les limites.

Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces annelés. Si \mathcal{M} est un X -module (resp. un X -prémodule), le préfaisceau image directe $f_*(\mathcal{M})$ est un faisceau (resp. un préfaisceau) de modules sur $f_*(\mathcal{O}_X)$. On note $f_*(\mathcal{M})$ le Y -module (resp. le Y -prémodule) obtenu par la restriction des scalaires $\mathcal{O}_Y: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$, que l'on appelle l'image directe de \mathcal{M} par f . Le foncteur $f_*: \text{Mod}_X \rightarrow \text{Mod}_Y$ possède un adjoint à gauche f^* , appelé image réciproque, que l'on explicite comme suit. Si \mathcal{N} est un Y -module, le faisceau image réciproque $f^*(\mathcal{N})$ est muni d'une structure canonique de $f^*(\mathcal{O}_Y)$ -module, et on pose $f^*(\mathcal{N}) = f^*(\mathcal{N}) \otimes_{f^*(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{O}_X$, \mathcal{O}_X étant muni de la structure de faisceau d'algèbres sur $f^*(\mathcal{O}_Y)$ provenant du morphisme $f^*(\mathcal{O}_Y) \rightarrow \mathcal{O}_X$ adjoint à \mathcal{O}_f , et de même pour un morphisme de Y -modules. Si X' est l'espace annelé d'espace topologique sous-jacent X et de

faisceau structural $f^*(\mathcal{O}_Y)$, la bijection naturelle $\mathbf{Ab}_Y(\mathcal{N}, f_*(\mathcal{M})) \simeq \mathbf{Ab}_X(f^*(\mathcal{N}), \mathcal{M})$ de l'adjonction $f^*, f_*: \mathbf{Ab}_Y \rightleftarrows \mathbf{Ab}_X$ se restreint en une bijection $\mathbf{Mod}_Y(\mathcal{N}, f_*(\mathcal{M})) \simeq \mathbf{Mod}_{X'}(f^*(\mathcal{N}), \mathcal{M}')$, où \mathcal{M}' désigne le X' -module obtenu par la restriction des scalaires \mathcal{O}_f^\sharp ; en composant avec la bijection $\mathbf{Mod}_{X'}(f^*(\mathcal{N}), \mathcal{M}') \simeq \mathbf{Mod}_X(f^*(\mathcal{N}), \mathcal{M})$ provenant de l'adjonction entre extension et restriction des scalaires, on obtient la propriété d'adjonction citée.

Notons que le foncteur f^* n'est pas exact en général. C'est toutefois le cas lorsque f est le morphisme d'inclusion d'un sous-espace $P \hookrightarrow X$, auquel cas f^* s'identifie au foncteur f^* . On note aussi $\mathcal{M}|_P$ le P -module $f^*(\mathcal{M})$, qui coïncide bien sûr avec la restriction usuelle lorsque P est un ouvert. Le foncteur f_* est évidemment additif et, par suite, le foncteur f^* également.

2.2 Soit X un espace annelé. On appelle X -algèbre tout faisceau d'algèbres (associatives, commutatives et unifères) sur le faisceau structural \mathcal{O}_X . Une X -algèbre \mathcal{A} est donc la donnée d'un X -module, qu'on notera encore \mathcal{A} , d'une section globale e de \mathcal{A} et d'un morphisme de X -modules $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ définissant pour chaque ouvert U une structure de $\mathcal{O}_X(U)$ -algèbre sur $\mathcal{A}(U)$ d'unité $e|_U$. De manière équivalente, une X -algèbre \mathcal{A} est la donnée d'un faisceau d'anneaux, encore noté \mathcal{A} , et d'un morphisme de faisceaux d'anneaux $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{A}$, qu'on appellera le *morphisme structural* de \mathcal{A} . On note \mathbf{Alg}_X la catégorie des X -algèbres, qui est isomorphe à $(\mathcal{O}_X \downarrow \mathbf{An}_X)$. On notera aussi $\Gamma(X, ?): \mathbf{Alg}_X \rightarrow \mathbf{Alg}_{\mathcal{O}(X)}$ le foncteur des sections globales de X -algèbres, qui est évidemment compatible au moyen des foncteurs oubli avec le foncteur $\Gamma(X, ?): \mathbf{Mod}_X \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}(X)}$.

Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces annelés. Si \mathcal{A} est une X -algèbre de morphisme structural φ , le Y -module $f_*(\mathcal{A})$ est une Y -algèbre de morphisme structural $f_*(\varphi)\mathcal{O}_f$. Si \mathcal{B} est une Y -algèbre, le X -module $f^*(\mathcal{B})$ est aussi muni d'une structure de X -algèbre dont le morphisme structural $\mathcal{O}_X \rightarrow f^*(\mathcal{B}) \otimes_{f^*(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{O}_X$ est défini par $x \mapsto 1 \otimes x$. On obtient de cette façon une adjonction $f^*, f_*: \mathbf{Alg}_Y \rightleftarrows \mathbf{Alg}_X$ compatible avec l'adjonction analogue pour les faisceaux de modules.

2.3 Soient X un espace géométrique et \mathcal{M} un X -module. Pour tout $x \in X$, on note $\mathcal{M}(x)$ le $\kappa(x)$ -module $\mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x) = \mathcal{M}_x/\mathfrak{m}_x \mathcal{M}_x$. Si s est une section de \mathcal{M} au-dessus d'un ouvert U et si $x \in U$, on note $s(x)$ l'image canonique de s dans $\mathcal{M}(x)$, qu'on appelle la *valeur* de s en x . L'ensemble U_s des points $x \in U$ où s ne s'annule pas n'est pas un ouvert de U en général, mais c'est le cas lorsque \mathcal{M} est localement libre de rang fini : en effet, on peut alors supposer $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X^n$, et si $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathcal{O}_X^n(U) = \mathcal{O}_X(U)^n$, alors U_s est réunion des ouverts U_{s_i} . Pour $s \in \mathcal{O}_X(U)$ et $t \in \mathcal{M}(U)$, on a la relation $U_{st} = U_s \cap U_t$.

2.4 Théorème. *Soit X un schéma affine. Les foncteurs des sections globales $\Gamma(X, ?): \mathbf{Mod}_X \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}(X)}$ et $\Gamma(X, ?): \mathbf{Alg}_X \rightarrow \mathbf{Alg}_{\mathcal{O}(X)}$ possèdent des adjoints à gauches. De plus, ces adjonctions commutent aux foncteurs oubli et leurs unités sont des isomorphismes.*

Démonstration. On peut bien sûr supposer $X = \text{Spec } A$, et on utilisera les notations de 1.9. On ne formule la preuve que dans le cas des X -modules, mais elle reste valide dans le cas des X -algèbres. On commence par décrire le foncteur adjoint $\mathbf{Mod}_{\mathcal{O}(X)} \rightarrow \mathbf{Mod}_X$ sur les objets. Étant donné un $\mathcal{O}(X)$ -module M , que l'on peut voir comme un A -module grâce à l'isomorphisme ε_A , on détermine un préfaisceau de modules \mathcal{M} sur \mathcal{F} en posant $\mathcal{M}(U) = S(U)^{-1}M$ avec les restrictions évidentes. En passant aux faisceaux associés, on obtient ainsi un X -module \tilde{M} . Soit $\eta_M: M \rightarrow \tilde{M}(X)$ le morphisme canonique.

Soit \mathcal{N} un X -module et $\varphi: M \rightarrow \mathcal{N}(X)$ un morphisme de $\mathcal{O}(X)$ -modules. Notons \mathcal{N}' le préfaisceau de modules sur \mathcal{F} obtenu de \mathcal{N} par la restriction des scalaires $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_X$. Si U est un ouvert de X , le morphisme de A -modules

$$M \xrightarrow{\varphi} \mathcal{N}(X) \rightarrow \mathcal{N}(U)$$

se factorise en un morphisme de $(S(U)^{-1}A)$ -modules $\mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{N}(U)$. Ces morphismes définissent évidemment un morphisme de préfaisceaux de modules $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}'$, d'où un morphisme de X -modules $\varphi^\sharp: \tilde{M} \rightarrow \mathcal{N}$.

On obtiendra la propriété d'adjonction souhaitée si l'on montre que $\varphi \mapsto \varphi^\sharp$ et $\psi \mapsto \psi_X \eta_M$ sont des bijections réciproques entre $\mathbf{Mod}_{\mathcal{O}(X)}(M, \mathcal{N}(X))$ et $\mathbf{Mod}_X(\tilde{M}, \mathcal{N})$. Le fait que $\varphi =$

$(\varphi^\sharp)_X \eta_X$ découle de la commutativité des triangles dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}(X) & \longrightarrow & \mathcal{N}(X) \\ & \searrow \eta_M & \downarrow & \nearrow (\varphi^\sharp)_X & \\ & & \tilde{M}(X) & & \end{array}$$

dont la première ligne est φ . L'égalité $\psi = (\psi_X \eta_M)^\sharp$ découle du fait que ψ , étant un morphisme de X -modules, fait commuter les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\eta_M} & \tilde{M}(X) & \xrightarrow{\psi_X} & \mathcal{N}(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}(U) & \longrightarrow & \tilde{M}(U) & \xrightarrow{\psi_U} & \mathcal{N}(U) \end{array}$$

et que $(\psi_X \eta_M)^\sharp$ est l'unique tel morphisme. Finalement, le fait que η est un isomorphisme est un cas particulier de la proposition 2.5 ci-dessous. \square

Notons que le foncteur $\tilde{\cdot}: \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}(X)} \rightarrow \mathbf{Mod}_X$ est additif en tant qu'adjoint d'un foncteur additif. De plus, comme la localisation de modules et le passage au faisceau associé sont des foncteurs exacts, il est également exact.

2.5 Proposition. *Soit X un schéma affine, M un $\mathcal{O}(X)$ -module (resp. une $\mathcal{O}(X)$ -algèbre) et U un ouvert spécial de X . Les notations étant celles de 2.4, le morphisme canonique $\mathcal{M}(U) \rightarrow \tilde{M}(U)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Comme en 1.11, on se ramène tout de suite au lemme 1.12 dans le cas d'un module. L'assertion pour les algèbres en est un corollaire, en considérant les modules sous-jacents. \square

2.6 Proposition. *Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas affines, M un $\mathcal{O}(X)$ -module, N un $\mathcal{O}(Y)$ -module, B une $\mathcal{O}(X)$ -algèbre et C une $\mathcal{O}(Y)$ -algèbre. Il existe des isomorphismes naturels*

$$({}_{\mathcal{O}(f)}M)^\sim \simeq f_*(\tilde{M}) \quad \text{et} \quad ({}_{\mathcal{O}(f)}B)^\sim \simeq f_*(\tilde{B})$$

ainsi que des isomorphismes naturels

$$(\mathcal{O}(X) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} N)^\sim \simeq f^*(\tilde{N}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{O}(X) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} C)^\sim \simeq f^*(\tilde{C})$$

tels que les premiers soient les images des seconds par les foncteurs oubli.

Démonstration. Soit $\mu: ({}_{\mathcal{O}(f)}M)^\sim \rightarrow f_*(\tilde{M})$ le morphisme adjoint au morphisme de $\mathcal{O}(Y)$ -modules ${}_{\mathcal{O}(f)}\eta_M: {}_{\mathcal{O}(f)}M \rightarrow f_*(\tilde{M})(X) = {}_{\mathcal{O}(f)}\tilde{M}(X)$; il est naturel car η_M l'est. Par construction, μ est associé au morphisme de préfaisceaux qui sur un ouvert U de Y est l'isomorphisme $S(U)^{-1}({}_{\mathcal{O}(f)}M) \simeq {}_{\mathcal{O}_{f,U}}(S(f^{-1}(U))M)$ et c'est donc un isomorphisme. Le morphisme de Y -algèbres adjoint à ${}_{\mathcal{O}(f)}\eta_B$ se transforme en le morphisme précédent pas le foncteur oubli $\mathbf{Alg}_X \rightarrow \mathbf{Mod}_X$, et c'est donc un isomorphisme par ce qui précède.

La deuxième assertion résulte du fait que chacun des foncteurs $N \mapsto (\mathcal{O}(X) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} N)^\sim$ et $N \mapsto f^*(\tilde{N})$ est adjoint à gauche au foncteur $\mathcal{M} \mapsto {}_{\mathcal{O}(f)}\mathcal{M}(X) = (f_*\mathcal{M})(Y)$, et de même pour les algèbres. \square

2.7 Soit X un espace annelé. Un X -module \mathcal{M} est dit *quasi-cohérent* si tout point x de X possède un voisinage ouvert U tel que $\mathcal{M}|_U$ soit le conoyau d'un morphisme de U -modules libres. On dit qu'une X -algèbre est quasi-cohérente si le X -module sous-jacent l'est. On note \mathbf{Qcoh}_X la sous-catégorie pleine de \mathbf{Mod}_X formée des X -modules quasi-cohérents. Du fait que les foncteurs de la forme f^* commutent aux limites inductives on déduit immédiatement les assertions suivantes : si $\mathcal{M}|_U$ est le conoyau d'un morphisme de U -module libre, alors $\mathcal{M}|_V$ est également le conoyau

d'un morphisme de V -modules libres pour tout ouvert $V \subset U$; toute somme de modules quasi-cohérents est un module quasi-cohérent; si $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de X par des ouverts, alors un \mathcal{M} est quasi-cohérent si et seulement si $\mathcal{M}|_{U_i}$ est quasi-cohérent pour tout $i \in I$.

Si $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme d'espaces annelés et \mathcal{N} est un Y -module quasi-cohérent, alors $f^*(\mathcal{N})$ est un X -module quasi-cohérent. En effet, si $x \in X$, il existe un voisinage V de $f(x)$ et des ensembles I et J tels que $\mathcal{N}|_V$ soit le conoyau d'un morphisme $\mathcal{O}_V^{(I)} \rightarrow \mathcal{O}_V^{(J)}$; si $U = f^{-1}(V)$ et $g: U \rightarrow V$ désigne le morphisme d'espaces annelés induit par f , alors $f^*(\mathcal{N})|_U = g^*(\mathcal{N}|_V)$, et comme g^* commute aux limites inductives, $g^*(\mathcal{N}|_V)$ est conoyau d'un morphisme $\mathcal{O}_U^{(I)} \rightarrow \mathcal{O}_U^{(J)}$.

2.8 Soit X un schéma affine. Dans ce paragraphe on notera ε la counité de l'adjonction $\tilde{?}, \Gamma(X, ?): \text{Mod}_{\mathcal{O}(X)} \rightleftarrows \text{Mod}_X$ (2.4), qui est donnée par $\varepsilon_{\mathcal{M}} = (\text{id}_{\mathcal{M}(X)})^\sharp: \mathcal{M}(X)^\sim \rightarrow \mathcal{M}$. On notera de même $\varepsilon_{\mathcal{A}} = (\text{id}_{\mathcal{A}(X)})^\sharp: \mathcal{A}(X)^\sim \rightarrow \mathcal{A}$ si \mathcal{A} est une X -algèbre. Remarquons que $\varepsilon_{\mathcal{O}_X}$ est un isomorphisme de X -algèbres: si $X = \text{Spec } A$, il est associé à l'isomorphisme de préfaisceaux $U \mapsto S(U)^{-1}\varepsilon_A$ où ε_A est la counité de l'adjonction de 1.9.

Lemme. *Soit X un schéma affine et \mathcal{M} un X -module. Si \mathcal{M} est le conoyau d'un morphisme de X -modules libres, alors $\varepsilon_{\mathcal{M}}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Soit $\mathcal{O}_X^{(I)} \rightarrow \mathcal{O}_X^{(J)}$ un morphisme de X -module ayant \mathcal{M} pour conoyau. Puisque $\varepsilon_{\mathcal{O}_X}$ est un isomorphisme et que le foncteur $\tilde{?}$ commute aux limites inductives, ce morphisme s'identifie à un morphisme $(\mathcal{O}(X)^{(I)})^\sim \rightarrow (\mathcal{O}(X)^{(J)})^\sim$. Sachant que $\tilde{?}$ est pleinement fidèle (car l'unité de l'adjonction du théorème 2.4 est un isomorphisme), ce morphisme est de la forme $\tilde{\mu}$ pour un certain morphisme $\mu: \mathcal{O}(X)^{(I)} \rightarrow \mathcal{O}(X)^{(J)}$. Soit M le conoyau de μ . Utilisant une nouvelle fois que $\tilde{?}$ commute aux limites inductive, \tilde{M} est conoyau de $\tilde{\mu}$. Pour résumer, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}_X^{(I)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X^{(J)} & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \text{---} & & \\ (\mathcal{O}(X)^{(I)})^\sim & \longrightarrow & (\mathcal{O}(X)^{(J)})^\sim & \longrightarrow & \tilde{M} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes, ce qui montre l'existence d'un isomorphisme $\nu: \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \tilde{M}$. Par les propriétés générales des adjonctions, $\varepsilon_{\mathcal{M}}$ est l'inverse de $(\nu_X^{-1}\eta_M)^\sim \nu$. \square

Théorème. *Soit X un schéma affine et \mathcal{M} un X -module. Alors \mathcal{M} est quasi-cohérent si et seulement si $\varepsilon_{\mathcal{M}}$ est un isomorphisme. Lorsque c'est le cas, \mathcal{M} est le conoyau d'un morphisme de X -modules libres.*

Démonstration. Supposons d'abord que $\varepsilon_{\mathcal{M}}$ est un isomorphisme, et montrons que \mathcal{M} est conoyau d'un morphisme de X -modules libres. Le $\mathcal{O}(X)$ -module $\mathcal{M}(X)$ est le conoyau d'un morphisme $\mathcal{O}(X)^{(I)} \rightarrow \mathcal{O}(X)^{(J)}$. Appliquant le foncteur $\tilde{?}$ qui commute aux limites inductives, on obtient que $\mathcal{M}(X)^\sim$ est conoyau d'un morphisme $(\mathcal{O}(X)^\sim)^{(I)} \rightarrow (\mathcal{O}(X)^\sim)^{(J)}$. Notre assertion découle donc du fait que $\varepsilon_{\mathcal{O}_X}$ est un isomorphisme.

Réciproquement, supposons que \mathcal{M} soit quasi-cohérent. Pour montrer que $\varepsilon_{\mathcal{M}}$ est un isomorphisme, il suffit de montrer que $\varepsilon_{\mathcal{M},U}$ est un isomorphisme pour tout ouvert spécial U de X , car ces ouverts forment une base de la topologie de X . Fixons un tel ouvert $U = X_s$, où $s \in \mathcal{O}(X)$. Soit d'autre part $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts spéciaux suffisamment petits pour que $\mathcal{M}|_{V_i}$ soit le conoyau d'un morphisme de V_i -modules libres, pour tout $i \in I$ (un tel recouvrement existe par 2.7); on peut en outre prendre I fini car X est quasi-compact (1.10). Posons $V_{ij} = V_i \cap V_j$, $U_i = U \cap V_i$ et $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Puisque V_i et V_{ij} sont des ouverts spéciaux, ce sont aussi des ouverts affines. Par 2.7, $\mathcal{M}|_{V_{ij}}$ est aussi conoyau d'un morphisme de V_{ij} -modules libres. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow \mathcal{M}(X)_s & \rightarrow & \prod \mathcal{M}(V_i)_{s|V_i} & \rightrightarrows & \prod \mathcal{M}(V_{ij})_{s|V_{ij}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \rightarrow \mathcal{M}(U) & \longrightarrow & \prod \mathcal{M}(U_i) & \rightrightarrows & \prod \mathcal{M}(U_{ij}) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont induites par les morphismes de restriction et s'identifient, au moyen des propositions 1.11 et 2.5, aux morphismes $\varepsilon_{\mathcal{M},U}$, $\prod \varepsilon_{\mathcal{M}|V_i,U_i}$ et $\prod \varepsilon_{\mathcal{M}|V_{ij},U_{ij}}$. Les deux lignes y sont exactes car \mathcal{M} est un faisceau et la localisation par s est un foncteur exact (qui commute en particulier aux produits finis). Par le lemme, les flèches $\varepsilon_{\mathcal{M}|V_i,U_i}$ et $\varepsilon_{\mathcal{M}|V_{ij},U_{ij}}$ sont des isomorphismes, donc $\varepsilon_{\mathcal{M},U}$ est un isomorphisme. \square

Par définition d'une X -algèbre quasi-cohérente, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire. *Soit X un schéma affine et \mathcal{A} une X -algèbre. Alors \mathcal{A} est quasi-cohérente si et seulement si $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ est un isomorphisme.*

En particulier, si X est un schéma affine, les foncteurs $\tilde{?}$ et $\Gamma(X, ?)$ induisent des équivalences quasi-inverses entre la catégories des $\mathcal{O}(X)$ -modules (resp. des $\mathcal{O}(X)$ -algèbres) et celle des X -modules quasi-cohérents (resp. des X -algèbres quasi-cohérentes).

2.9 Proposition. *Soit X un schéma. Le foncteur oublie $\mathbf{Qcoh}_X \rightarrow \mathbf{Mod}_X$ crée les limites inductives et les limites projectives finies. En particulier, \mathbf{Qcoh}_X est une catégorie abélienne et le foncteur $\mathbf{Qcoh}_X \rightarrow \mathbf{Mod}_X$ est exact.*

Démonstration. Montrons d'abord que le foncteur $\mathbf{Qcoh}_X \rightarrow \mathbf{Mod}_X$ crée les noyaux et les conoyaux. Comme \mathbf{Qcoh}_X est une sous-catégorie pleine de la catégorie abélienne \mathbf{Mod}_X , il suffit de montrer que le noyau et le conoyau dans \mathbf{Mod}_X d'un morphisme de X -modules quasi-cohérents sont encore quasi-cohérents. Soit $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un tel morphisme, x un point de X et U un ouvert affine de X contenant x . Par le théorème 2.8, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(U) \sim & \xrightarrow{\tilde{\nu}} & \mathcal{N}(U) \sim \\ \varepsilon_{\mathcal{M}|U} \downarrow & & \downarrow \varepsilon_{\mathcal{N}|U} \\ \mathcal{M}|U & \xrightarrow{\mu|U} & \mathcal{N}|U \end{array}$$

pour un certain morphisme de $\mathcal{O}_X(U)$ -modules $\nu: \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{N}(U)$, où les flèches verticales sont des isomorphismes. Sachant que le foncteur $\tilde{?}$ est exact, on en déduit des isomorphismes $(\ker \nu) \sim \rightrightarrows \ker(\mu|U)$ et $(\operatorname{coker} \nu) \sim \rightrightarrows \operatorname{coker}(\mu|U)$. On a d'autre part des isomorphismes $\ker(\mu|U) \cong (\ker \mu)|U$ et $\operatorname{coker}(\mu|U) \cong (\operatorname{coker} \mu)|U$ car le foncteur $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}|U$ est exact. Par le théorème 2.8, $(\ker \mu)|U$ et $(\operatorname{coker} \mu)|U$ sont conoyaux de morphismes de U -modules libres. Par conséquent, $\ker \mu$ et $\operatorname{coker} \mu$ sont quasi-cohérents. Les autres assertions de la proposition se déduisent formellement de ceci, car on sait déjà que le foncteur $\mathbf{Qcoh}_X \rightarrow \mathbf{Mod}_X$ crée les sommes quelconques (2.7) et en particulier, comme \mathbf{Qcoh}_X est abélienne par ce qui précède, les produits finis. \square

2.10 Soient X un espace annelé et \mathcal{L} un X -module inversible, c'est-à-dire localement libre de rang 1. Rappelons que pour $n < 0$ on note $\mathcal{L}^{\otimes n}$ le X -module $\tilde{\mathcal{L}}^{\otimes(-n)}$ où $\tilde{\mathcal{L}}$ est le X -module dual de \mathcal{L} , et on note $\mathcal{L}^{\otimes 0} = \mathcal{O}_X$. Pour tout X -module \mathcal{M} on pose

$$\Gamma_*(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes n})(X).$$

Pour $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$, $\Gamma_*(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ est muni d'une structure d'anneau gradué de la manière suivante : si $s \in \mathcal{L}^{\otimes m}(X)$ et $t \in \mathcal{L}^{\otimes n}(X)$, alors st est l'image canonique de $s \otimes t$ dans $\mathcal{L}^{\otimes(m+n)}(X)$, et on prend pour éléments homogènes de degré n les éléments de $\mathcal{L}^{\otimes n}(X)$. Si maintenant \mathcal{M} est un X -module quelconque, $\Gamma_*(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ est muni d'une structure de $\Gamma_*(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ -module gradué de la même manière. Si dans la formule ci-dessus on remplace \mathcal{M} par un morphisme de X -modules μ , on obtient une définition de $\Gamma_*(\mathcal{L}, \mu)$ qui fait de $\Gamma_*(\mathcal{L}, ?)$ un foncteur additif $\mathbf{Mod}_X \rightarrow \mathbf{grMod}_{\Gamma_*(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)}$.

2.11 Soient X un espace géométrique, \mathcal{L} un X -module inversible et \mathcal{M} un X -module. Si s est un élément homogène de $\Gamma_*(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$, alors X_s est un ouvert de X (2.3). On a une flèche naturelle en \mathcal{M}

$$\Gamma_*(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{L}|X_s, \mathcal{M}|X_s),$$

somme des morphismes de restriction. Lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$, cette flèche est un morphisme d'anneaux gradués; en général, c'est un morphisme de $\Gamma_*(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ -modules. Comme l'image de s par ce morphisme d'anneaux gradués est inversible, il se factorise à travers un unique morphisme $\Gamma_*(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)_s \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{L}|_{X_s}, \mathcal{O}_X|_{X_s})$. De cette façon, $\Gamma_*(\mathcal{L}|_{X_s}, \mathcal{M}|_{X_s})$ est muni d'une structure de $\Gamma_*(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)_s$ -module, et la flèche ci-dessus se factorise donc à travers un unique morphisme

$$\Gamma_*(\mathcal{L}, \mathcal{M})_s \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{L}|_{X_s}, \mathcal{M}|_{X_s})$$

qui est naturel en \mathcal{M} . On déduit facilement de l'unicité de ces factorisations que les carrés

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_*(\mathcal{L}, \mathcal{M})_s & \longrightarrow & \Gamma_*(\mathcal{L}|_{X_s}, \mathcal{M}|_{X_s}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_*(\mathcal{L}|_U, \mathcal{M}|_U)_{s|_U} & \longrightarrow & \Gamma_*(\mathcal{L}|_{U_s|_U}, \mathcal{M}|_{U_s|_U}). \end{array}$$

sont commutatifs. On obtient en particulier un morphisme naturel

$$\Gamma_*(\mathcal{L}, \mathcal{M})_{(s)} \rightarrow \mathcal{M}(X_s) \tag{1}$$

en degré 0. Remarquons que si X est un schéma affine et $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$, alors (1) s'identifie à la flèche $\varepsilon_{\mathcal{M}, X_s}$, counité de l'adjonction définie en 2.4, comme on le voit en comparant leurs constructions respectives et en tenant compte de l'isomorphisme évident $\Gamma_*(\mathcal{O}_X, \mathcal{M})_{(s)} \cong \mathcal{M}(X)_s$; c'est donc un isomorphisme lorsque \mathcal{M} est quasi-cohérent en vertu du théorème 2.8.

2.12 Proposition. *Soient X un schéma concentré au-dessus d'un schéma affine, \mathcal{L} un X -module inversible et \mathcal{M} un X -module quasi-cohérent. Alors pour tout $s \in \Gamma_*(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ homogène, le morphisme canonique $\Gamma_*(\mathcal{L}, \mathcal{M})_{(s)} \rightarrow \mathcal{M}(X_s)$ est un isomorphisme de $\Gamma_*(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)_{(s)}$ -modules.*

Démonstration. Comme on l'a remarqué en 2.11, cette proposition généralise une partie du théorème 2.8, qui traite le cas où X est un schéma affine et $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$. L'hypothèse sur X nous permet de se ramener à ce cas particulier. En effet, comme X est concentré au-dessus d'un schéma affine, on peut le recouvrir par des ouverts affines U_i en nombre fini tels que, d'une part, $\mathcal{L}|_{U_i}$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_X|_{U_i}$ et, d'autre part, $U_i \cap U_j$ soit recouvert par des ouverts affines U_{ijk} en nombre fini (1.26). Par 2.11, on a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{L}, \mathcal{M})_{(s)} & \rightarrow & \prod \Gamma_*(\mathcal{L}|_{U_i}, \mathcal{M}|_{U_i})_{(s|_{U_i})} & \rightrightarrows & \prod \Gamma_*(\mathcal{L}|_{U_{ijk}}, \mathcal{M}|_{U_{ijk}})_{(s|_{U_{ijk}})} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}(X_s) & \longrightarrow & \prod \mathcal{M}(X_s \cap U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{M}(X_s \cap U_{ijk}) \end{array}$$

dont la deuxième ligne est exacte car \mathcal{M} est un faisceau. Le théorème 2.8 affirme que les deux dernières flèches verticales sont des isomorphismes; il suffit donc de montrer que la première ligne est aussi exacte. Comme les produits qui y résident sont finis et la localisation est un foncteur exact, elle s'obtient de la suite de $\Gamma_*(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ -modules gradués

$$0 \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \rightarrow \prod \Gamma_*(\mathcal{L}|_{U_i}, \mathcal{M}|_{U_i}) \rightrightarrows \prod \Gamma_*(\mathcal{L}|_{U_{ijk}}, \mathcal{M}|_{U_{ijk}})$$

par localisation, et cette dernière est exacte en chaque degré car $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes n}$ est un faisceau. \square

2.13 Proposition. *Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas et \mathcal{M} un X -module quasi-cohérent. Si f est concentré, alors $f_*\mathcal{M}$ est un Y -module quasi-cohérent.*

Démonstration. En considérant les morphismes concentrés $f_U: f^{-1}(U) \rightarrow U$ induits par f pour $U \subset Y$ un ouvert affine, et en notant que $(f_U)_*(\mathcal{M}|_{f^{-1}(U)}) = (f_*\mathcal{M})|_U$, il suffit de montrer la proposition lorsque Y est un schéma affine. Alors X est quasi-compact. Par la proposition 1.26, on peut le recouvrir par une famille finie d'ouverts affines U_i telle que chaque intersection $U_i \cap U_j$

soit réunion d'un nombre fini d'ouverts affines U_{ijk} . Comme \mathcal{M} est un faisceau, c'est le noyau de la double flèche

$$\prod (i_{U_i})_*(\mathcal{M}|_{U_i}) \rightrightarrows \prod (i_{U_{ijk}})_*(\mathcal{M}|_{U_{ijk}})$$

où $i_U: U \hookrightarrow X$ désigne le morphisme d'inclusion. Puisque f_* est exact à gauche, $f_*\mathcal{M}$ est le noyau de la double flèche

$$\prod (f|_{U_i})_*(\mathcal{M}|_{U_i}) \rightrightarrows \prod (f|_{U_{ijk}})_*(\mathcal{M}|_{U_{ijk}})$$

dont les extrémités sont des X -modules quasi-cohérents en vertu des propositions 2.6 et 2.9. C'est donc un X -module quasi-cohérent par la proposition 2.9. \square

2.14 Un morphisme de schémas $f: X \rightarrow Y$ est *affine* s'il existe un recouvrement de Y par des ouverts affines U_i tel que $f^{-1}(U_i)$ soit un ouvert affine de X pour tout i . Un morphisme entre schémas affines est évidemment affine.

Proposition. *Un morphisme de schémas $f: X \rightarrow Y$ est affine si et seulement si pour tout ouvert U de Y , le morphisme induit $f^{-1}(U) \rightarrow U$ est affine. Tout morphisme affine est séparé et quasi-compact.*

Démonstration. La suffisance est triviale. Supposons f affine. Il existe donc un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de Y par des ouverts affines tel que $f^{-1}(U_i)$ soit affine. Il suffit alors de montrer que les morphismes $f^{-1}(U \cap U_i) \rightarrow U \cap U_i$ sont affines. Mais si $(V_j)_{j \in J}$ est un recouvrement de $U \cap U_i$ par des ouverts spéciaux de U_i , alors $f^{-1}(V_j)$ est un ouvert spécial de $f^{-1}(U_i)$, donc est affine. Comme chacun des morphismes $f^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ induits par f est séparé et quasi-compact (1.25 et 1.27), f est séparé et quasi-compact. \square

2.15 Proposition. *Si $f: X \rightarrow Y$ est une immersion fermée de schémas et si Y est un schéma affine, alors X est un schéma affine. Toute immersion fermée de schémas est affine.*

Démonstration. Il suffit de montrer la première assertion. Supposons que $Y = \text{Spec } A$. Par 1.25, f est un morphisme concentré, donc le Y -module $f_*(\mathcal{O}_X)$ est quasi-cohérent par la proposition 2.13. Le noyau de \mathcal{O}_f est donc un Y -idéal quasi-cohérent (2.9). En vertu de l'équivalence du théorème 2.8, $\ker \mathcal{O}_f$ est de la forme $\tilde{\mathfrak{a}}$ pour un certain idéal \mathfrak{a} de A . Mais si $\varphi: A \rightarrow A/\mathfrak{a}$ désigne le morphisme canonique, on sait que $\text{Spec } \varphi$ est une immersion fermée (1.15), et le noyau de $\mathcal{O}_{\text{Spec } \varphi}$ est aussi $\tilde{\mathfrak{a}}$, comme on le voit immédiatement de 1.13 et de la construction de $\tilde{\mathfrak{a}}$ en 2.4 en utilisant le fait que la localisation est un foncteur exact. Par le résultat général démontré en 1.6, f est $\text{Spec } \varphi$ sont isomorphes dans $(\text{Sch} \downarrow Y)$. En particulier, X est affine. \square

2.16 Théorème. *Soit S un schéma. L'application faisant correspondre à un morphisme de schémas $f: X \rightarrow S$ la S -algèbre $f_*(\mathcal{O}_X)$ induit une antiéquivalence entre la sous-catégorie pleine de $(\text{Sch} \downarrow S)$ formée des morphismes affines et celle des S -algèbres quasi-cohérentes. De plus, les quotients de \mathcal{O}_S correspondent exactement aux immersions fermées.*

Démonstration. Il est clair que l'application en question est fonctorielle : à un morphisme de schémas

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & & S \end{array}$$

au-dessus de S on associe le morphisme de S -algèbres $g_*(\mathcal{O}_h): g_*(\mathcal{O}_Y) \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$. De plus, l'image par ce foncteur d'un morphisme concentré, par exemple un morphisme affine (2.14), est une algèbre quasi-cohérente en vertu de la proposition 2.13. On sait aussi (1.6) que l'image d'une immersion fermée est un quotient de \mathcal{O}_S . Commençons par montrer que la restriction de ce foncteur aux morphismes affines est pleinement fidèle. Plus généralement, on va montrer l'assertion suivante : étant donné un morphisme quelconque $f: X \rightarrow S$, un morphisme affine $g: Y \rightarrow S$ et

un morphisme de S -algèbres $\alpha: g_*(\mathcal{O}_Y) \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$, il existe un unique morphisme de S -schémas $h: X \rightarrow Y$ tel que $g_*(\mathcal{O}_h) = \alpha$.

Supposons dans un premier temps que S et Y sont des schémas affines. Comme g est affine, $g_*(\mathcal{O}_Y)$ est une S -algèbre quasi-cohérente; si A désigne la $\mathcal{O}(S)$ -algèbre $\mathcal{O}(Y)$, alors $g_*(\mathcal{O}_Y)$ est isomorphe à \tilde{A} par le corollaire 2.8. En vertu des théorèmes 1.9 et 2.4, on a alors une suite d'isomorphismes

$$\mathrm{Alg}_S(g_*(\mathcal{O}_Y), f_*(\mathcal{O}_X)) \simeq \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}(S)}(A, \mathcal{O}(X)) \simeq (\mathrm{Sch} \downarrow S)(X, Y),$$

ce qui prouve l'assertion dans ce cas. En général, soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de S par des ouverts affines tel que $g^{-1}(U_i)$ soit un ouvert affine de Y , pour tout i . Soient $\alpha_i: g_*(\mathcal{O}_Y)|_{U_i} \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X)|_{U_i}$ la restriction de α à U_i et g_i le morphisme $g^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ induit par g . Par la proposition 2.14, g_i est un morphisme affine. Par le cas particulier, il existe un unique morphisme de schémas $h_i: f^{-1}(U_i) \rightarrow g^{-1}(U_i)$ tel que $(g_i)_*(\mathcal{O}_{h_i}) = (\alpha_i)_{U_i}$. Fixons deux indices i et j et soit $V \subset U_i \cap U_j$ un ouvert affine tel que $g^{-1}(V)$ soit affine. Les morphismes $h_{i,V}, h_{j,V}: f^{-1}(V) \rightarrow g^{-1}(V)$ induits par h_i et h_j sont tels que $(g_V)_*(\mathcal{O}_{h_{i,V}}) = \alpha_{ij} = (g_V)_*(\mathcal{O}_{h_{j,V}})$, où $g_V: g^{-1}(V) \rightarrow V$ est le morphisme induit par g qui est affine par la proposition 2.14. Par le cas particulier, $h_{i,V} = h_{j,V}$. Comme le morphisme $g^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow U_i \cap U_j$ induit par g est affine, les ouverts affines $V \subset U_i \cap U_j$ pour lesquels $g^{-1}(V)$ est affine recouvrent $U_i \cap U_j$; il s'ensuit que les morphismes $f^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow g^{-1}(U_i \cap U_j)$ induits par h_i et par h_j coïncident, et donc que les morphismes h_i proviennent d'un unique morphisme $h: X \rightarrow Y$. De plus, $g_*(\mathcal{O}_h)$ et α ont même restriction sur chaque U_i , donc sont identiques.

On exhibe maintenant le foncteur quasi-inverse. Soit \mathcal{A} une S -algèbre quasi-cohérente de morphisme structural $\varphi: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{A}$. Pour tout ouvert affine U de S , soit X_U le spectre premier de $\mathcal{A}(U)$. On note $f_U: X_U \rightarrow U$ la composition $\eta_U^{-1}(\mathrm{Spec} \varphi_U)$ et i_U l'inclusion $U \hookrightarrow S$. Si $V \subset S$ est un deuxième ouvert affine, soient $X_{UV} = f_U^{-1}(U \cap V)$ et $f_{UV}: X_{UV} \rightarrow U \cap V$ le morphisme induit par f_U . Par la proposition 2.6, on a un isomorphisme canonique de U -algèbres $(f_U)_*(\mathcal{O}_{X_U}) \simeq \mathcal{A}(U)^\sim$, et puisque $\mathcal{A}|_U$ est quasi-cohérente, le morphisme $\varepsilon_{\mathcal{A}|_U}: \mathcal{A}(U)^\sim \rightarrow \mathcal{A}|_U$ est un isomorphisme; on obtient donc un isomorphisme de U -algèbres $\beta_U: (f_U)_*(\mathcal{O}_{X_U}) \simeq \mathcal{A}|_U$, d'où par restriction un isomorphisme

$$\beta_{UV}: (f_{UV})_*(\mathcal{O}_{X_{UV}}) = (f_U)_*(\mathcal{O}_{X_U})|_{U \cap V} \simeq \mathcal{A}|_{U \cap V}.$$

Posons $\alpha_{UV} = \beta_{UV}^{-1} \beta_{VU}: (f_{VU})_*(\mathcal{O}_{X_{VU}}) \simeq (f_{UV})_*(\mathcal{O}_{X_{UV}})$. Comme X_{VU} est affine au-dessus de $U \cap V$ (2.14), il existe par ce qui précède un unique morphisme de schémas $h_{UV}: X_{UV} \simeq X_{VU}$ au-dessus de $U \cap V$ tel que $\alpha_{UV} = (f_{VU})_*(\mathcal{O}_{h_{UV}})$. Montrons que ces données forment un diagramme de recollement (1.8) avec lequel les $i_U f_U: X_U \rightarrow S$ sont compatibles. Soit W un troisième ouvert affine de S . Comme h_{UV} est un morphisme au-dessus de $U \cap V$, il induit un morphisme $h_{UVW}: X_{UV} \cap X_{UW} \rightarrow X_{VU} \cap X_{VW}$. Si $f_{UVW}: X_{UV} \cap X_{UW} \rightarrow U \cap V \cap W$ désigne le morphisme induit par f_U , alors $(f_{UVW})_*(\mathcal{O}_{h_{UVW}})$ n'est autre que $\alpha_{UVW} = \alpha_{UV}|_{U \cap V \cap W}$ qui est un isomorphisme, donc h_{UVW} est un isomorphisme. Pour vérifier la relation $h_{VWU} h_{UVW} = h_{UWV}$, il suffit de montrer la relation $\alpha_{UVW} \alpha_{VWU} = \alpha_{UWV}$; mais si l'on note $\beta_{UVW}: (f_{UVW})_*(\mathcal{O}_{X_{UV} \cap X_{UW}}) \simeq \mathcal{A}|_{U \cap V \cap W}$ la restriction de β_{UV} à $U \cap V \cap W$, on a $\alpha_{UVW} = \beta_{UVW}^{-1} \beta_{VWU}$, d'où la formule. Finalement, les $i_U f_U$ sont compatibles avec ce diagramme car les h_{UV} sont, par définition, des morphismes au-dessus de $U \cap V$.

Soit X la limite inductive de ce diagramme et $f: X \rightarrow S$ le morphisme induit par les $i_U f_U$, noté aussi $\mathrm{Spec} \mathcal{A}$. Comme X est recouvert par les images des immersions ouvertes $k_U: X_U \hookrightarrow X$ (1.8), il est clair que f est un morphisme affine. De plus, si \mathcal{A} est un quotient de \mathcal{O}_S , alors tout point $x \in S$ admet un voisinage ouvert affine U tel que f_U soit une immersion fermée (1.15), donc f est une immersion fermée. Si U est un ouvert affine de S , alors $\beta_U(f_*(\mathcal{O}_{k_U})|_U)$ est un isomorphisme de U -algèbres $f_*(\mathcal{O}_X)|_U \simeq \mathcal{A}|_U$. Or, la composition $(f_*(\mathcal{O}_{k_U})|_{U \cap V})(f_*(\mathcal{O}_{k_V})|_{U \cap V})^{-1}$ n'est autre que $(f_{VU})_*(\mathcal{O}_{h_{UV}}) = \alpha_{UV}$, donc on a les relations $\beta_U(f_*(\mathcal{O}_{k_U})|_{U \cap V}) = \beta_{VU}(f_*(\mathcal{O}_{k_V})|_{U \cap V})$ qui montrent que les $\beta_U(f_*(\mathcal{O}_{k_U})|_U)$ sont restrictions d'un isomorphisme $\beta_{\mathcal{A}}: f_*(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{A}$. On déduit alors de la théorie des catégories qu'il existe un unique foncteur Spec de la catégorie des S -algèbres quasi-cohérentes à valeurs dans celle des S -schémas affines pour lequel β est une transformation naturelle, et de plus que c'est le foncteur quasi-inverse cherché. \square

On déduit immédiatement de ce théorème que la composition de deux morphismes affines est un morphisme affine. Par exemple, comme les immersions ouvertes sont clairement affines, toute immersion de schémas est affine. On en déduit aussi que si Y est un schéma affine et $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme de schémas, pour que f soit affine, il faut (et il suffit) que X soit affine : on a en effet $X \cong \text{Spec}(f_*(\mathcal{O}_X)(Y))$ par construction de $\text{Spec } \mathcal{A}$.

On conclut cette section par des applications de ces résultats à l'étude des morphismes séparés.

2.17 Proposition. *Soient Y un schéma affine, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts affines. Alors f est séparé si et seulement si, pour tous i et j , $U_i \cap U_j$ est un ouvert affine et l'anneau $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$ est engendré par les images des anneaux $\mathcal{O}_X(U_i)$ et $\mathcal{O}_X(U_j)$.*

Démonstration. Soient $p, q: X \times_Y X \rightarrow X$ les projections. Soit $W_{ij} = p^{-1}(U_i) \cap q^{-1}(U_j)$; c'est un produit fibré de U_i et U_j au-dessus de Y (1.23) et $\Delta_f^{-1}(W_{ij}) = U_i \cap U_j$. Donc Δ_f est une immersion fermée si et seulement si les morphismes $f_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow W_{ij}$ induits par Δ_f le sont. Puisque Y est affine, les W_{ij} sont des schémas affines. Si f_{ij} est une immersion fermée, on obtient du théorème 2.15 que $U_i \cap U_j$ est un schéma affine.

Il reste à montrer, sous l'hypothèse que $U_i \cap U_j$ est affine, que la deuxième condition de l'énoncé est équivalente au fait que f_{ij} soit une immersion fermée. Par la preuve de 1.23, f_{ij} est le morphisme dont les composantes sont les morphismes d'inclusion $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_i$ et $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_j$. Tous ces schémas étant affines, $\mathcal{O}(f_{ij})$ s'identifie au morphisme $\mathcal{O}_X(U_i) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \mathcal{O}_X(U_j) \rightarrow \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$ induit par les restrictions. Dire que $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$ est engendré par les images de $\mathcal{O}_X(U_i)$ et $\mathcal{O}_X(U_j)$ revient à dire que ce morphisme est surjectif, ce qui par la proposition 1.15 est équivalent à dire que f_{ij} est une immersion fermée. \square

2.18 Proposition. *Soient S un schéma et $f_1: X_1 \rightarrow Y_1$, $f_2: X_2 \rightarrow Y_2$ des morphismes de schémas au-dessus de S . Si f_1 et f_2 sont des immersions ouvertes (resp. fermées; localement fermées), alors $f_1 \times_S f_2$ est une immersion du même type.*

Démonstration. Écrivons $f_1 = g_1 h_1$ et $f_2 = g_2 h_2$ où les $g_i: X'_i \rightarrow Y_i$ sont des immersions ouvertes et les $h_i: X_i \rightarrow X'_i$ des immersions fermées. On a alors $f_1 \times_S f_2 = (g_1 \times_S g_2)(h_1 \times_S h_2)$. On sait déjà que $g_1 \times_S g_2$ est une immersion ouverte (1.23). Il reste donc à montrer que $h = h_1 \times_S h_2$ est une immersion fermée. Supposons dans un premier temps que S , X'_1 et X'_2 soient des schémas affines. Dans ce cas, X_1 et X_2 sont aussi des schémas affines par le théorème 2.15. Si $S = \text{Spec } C$, $h_1 = \text{Spec } \alpha_1$ et $h_2 = \text{Spec } \alpha_2$, alors $h_1 \times_S h_2 = \text{Spec}(\alpha_1 \otimes_C \alpha_2)$. Par la proposition 1.15, α_1 et α_2 sont surjectifs, donc aussi $\alpha_1 \otimes_C \alpha_2$; par cette même proposition, $h_1 \times_S h_2$ est une immersion fermée.

Supposons maintenant que S , X'_1 et X'_2 soient quelconques. Pour montrer que h est une immersion fermée, il suffit de montrer que pour tout point x de $X'_1 \times_S X'_2$ il existe un voisinage ouvert U de x tel que le morphisme $h^{-1}(U) \rightarrow U$ induit par h soit une immersion fermée (1.5). Soit W un voisinage affine de l'image de x dans S , U_1 et U_2 des voisinages affines des images de x dans X'_1 et X'_2 , respectivement. On prend pour U l'intersection des préimages respectives de W , U_1 et U_2 . Soient $k_i: h_i^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ le morphisme induit par h_i ; c'est une immersion fermée. Par la proposition 1.23, U est produit fibré fibré de U_1 et U_2 au-dessus de W et le morphisme $h^{-1}(U) \rightarrow U$ induit par h n'est autre que $k_1 \times_W k_2$, qui est une immersion fermée par la première partie de la preuve. \square

§3 Spectres premiers homogènes

3.1 Les anneaux et modules gradués que nous considérerons seront toujours \mathbf{Z} -gradués. En outre, à moins d'une évidence contraire, tous les anneaux gradués seront nuls en degrés < 0 . Si S est un anneau gradué, la catégorie abélienne des S -modules gradués, avec les morphismes de degré 0, est notée grMod_S .

Soient S un anneau gradué et M un S -module gradué. Pour tout entier n , on note $M\{n\}$ le S -module gradué $\bigoplus_{k \geq 0} M_{n+k}$ dont la graduation est définie par $M\{n\}_k = M_{n+k}$ si $k \geq 0$ et $M\{n\}_k = 0$ si $k < 0$. Tout morphisme $\mu: M \rightarrow N$ de S -modules gradués induit des

morphismes $\mu\{n\}: M\{n\} \rightarrow N\{n\}$. Si M et N sont deux S -modules gradués, on introduit une relation d'équivalence sur l'ensemble de toutes les flèches $\mu\{n\}$, où $\mu: M \rightarrow N$ et $n \in \mathbf{Z}$, en identifiant deux morphismes $\mu\{p\}$ et $\nu\{q\}$ s'il existe un entier n tel que $\mu_k = \nu_k$ pour tout $k \geq n$. Il est clair que ces identifications sont compatibles avec les compositions et les sommes de morphismes, et donc qu'on obtient une catégorie additive $\overline{\text{grMod}}_S$ dont les objets sont les S -modules gradués et dont les morphismes sont les classes d'équivalence de morphismes de la forme $\mu\{n\}$ pour la relation qu'on vient de décrire. On dit d'un morphisme de $\overline{\text{grMod}}_S$ que c'est un *quasi-monomorphisme* (resp. *quasi-épimorphisme*; *quasi-isomorphisme*) s'il est équivalent à un monomorphisme (resp. un épimorphisme; un isomorphisme).

3.2 Soit S un anneau gradué. Nous allons lui associer un espace géométrique $\text{Proj } S$, dit *spectre premier homogène* de S . On note S_+ l'idéal gradué de A formé des éléments de degrés strictement positifs. Les éléments de $\text{Proj } S$ sont par définition les idéaux premiers gradués de S ne contenant pas S_+ . Si E est une partie de S , on note $V_+(E)$ l'ensemble des éléments de $\text{Proj } S$ contenant E , soit $V(E) \cap \text{Proj } S$. Les parties fermées de $\text{Proj } S$ sont alors exactement les parties de la forme $V_+(E)$; en d'autres termes, la topologie de $\text{Proj } S$ est induite par celle de $\text{Spec } S$. Si U est un ouvert de $\text{Proj } S$, on note $S_+(U)$ l'ensemble des éléments homogènes de S n'appartenant à aucun élément de U . On définit un préfaisceau d'anneaux \mathcal{F} sur $\text{Proj } S$ en posant $\mathcal{F}(U) = (S_+(U)^{-1}S)_0$ et en prenant pour morphismes de restriction les morphismes canoniques $(S_+(U)^{-1}S)_0 \rightarrow (S_+(V)^{-1}S)_0$. Le faisceau $\mathcal{O}_{\text{Proj } S}$ est le faisceau associé au préfaisceau \mathcal{F} . La fibre de ce faisceau en un point x s'identifie à l'anneau local $S_{(x)} = (S_x)_0$, et donc $\text{Proj } S$ ainsi défini est un espace géométrique.

3.3 Soit S un anneau gradué. On note $D_+(E)$ le complémentaire de $V_+(E)$ dans $\text{Proj } S$. On a pour V_+ des propriétés tout à fait analogues à celles de V (1.10). Il est clair que si E est une partie de S engendrant l'idéal gradué \mathfrak{a} (on entend par là que \mathfrak{a} est engendré par les composantes homogènes des éléments de E), alors $V_+(E) = V_+(\mathfrak{a})$. On vérifie aisément que pour \mathfrak{a} et \mathfrak{b} des idéaux gradués de S , $V_+(\mathfrak{a}) \subset V_+(\mathfrak{b})$ si et seulement si $\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) \cap S_+ \supset \mathfrak{r}(\mathfrak{b}) \cap S_+$. On déduit de ceci que si $f \in S_+$ est homogène, alors le morphisme canonique $S_f \rightarrow S_+(D_+(f))^{-1}S$ est inversible; en effet, un élément $g \in S_+(D_+(f))$ est exactement un élément homogène de S tel que $V_+(g) \subset V_+(f)$, et un tel g est déjà inversible dans S_f car il divise une puissance de f . Sur les ouverts de la forme $D_+(f)$, le préfaisceau \mathcal{F} de 3.2 s'identifie donc au préfaisceau $D_+(f) \mapsto S_{(f)}$.

Soit \mathfrak{a} un idéal gradué de S . Si x est un point de $\text{Proj } S$ contenant $\mathfrak{a} \cap S_+$, alors x contient \mathfrak{a} . En effet, il existe par définition un élément $f \in S_+$ homogène n'appartenant pas à x , et si $g \in \mathfrak{a}$ on a $fg \in \mathfrak{a} \cap S_+ \subset x$, donc $g \in x$ car x est premier. En combinant cette observation avec la relation $V_+(\bigcup_k E_k) = \bigcap_k V_+(E_k)$, on obtient que tout fermé de $\text{Proj } S$ est intersection de fermés de la forme $V_+(f)$ pour $f \in S_+$ homogène. Ainsi, les ouverts $D_+(f)$, pour $f \in S_+$ homogène, forment une base de la topologie de $\text{Proj } S$.

Soit E une partie de S_+ formée d'éléments homogènes. Pour que $\text{Proj } S = D_+(E)$, il faut et il suffit que E engendre S_+ en tant que S -module (ou, ce qui revient au même, que E engendre S en tant que A_0 -algèbre). Lorsque cette dernière condition est vérifiée, on a $\text{Proj } S = D_+(E)$ car tout idéal gradué de S contenant E doit alors contenir S_+ . Réciproquement, si $\text{Proj } S = D_+(E)$, aucun sous- S -module strict de S_+ ne contient E , donc E engendre l'idéal S_+ .

3.4 Proposition. *Soit A un anneau gradué. Pour tout $f \in S_+$ homogène, il existe un isomorphisme $\psi_f: D_+(f) \xrightarrow{\sim} \text{Spec } S_{(f)}$ faisant commuter les carrés*

$$\begin{array}{ccc} D_+(f) & \xrightarrow{\psi_f} & \text{Spec } S_{(f)} \\ \uparrow & & \uparrow \\ D_+(fg) & \xrightarrow{\psi_{fg}} & \text{Spec } S_{(fg)}. \end{array}$$

En particulier, $\text{Proj } S$ est un schéma.

Démonstration. Soit $d \geq 1$ le degré de f . Si x est un point de $D_+(f)$, on pose $\psi_f(x) = (\varphi_f(x)) \cap S_{(f)}$ où $\varphi_f: S \rightarrow S_f$ est le morphisme canonique; c'est l'idéal premier de $S_{(f)}$ dont les éléments

sont exactement les a^d/f^n pour $a \in S_n \cap \mathfrak{p}$ et $n \geq 0$. Vérifions que ψ_f est un homéomorphisme. Pour $\mathfrak{p} \in D_+(f)$ et $a \in S_n$, on a $a \in \mathfrak{p}$ si et seulement si $a^d/f^n \in \psi_f(\mathfrak{p})$ car \mathfrak{p} est premier. Ainsi, ψ_f est injective. Soit \mathfrak{q} un point de $\text{Spec } S_{(f)}$. Pour tout $n \geq 0$, posons

$$\mathfrak{p}_n = \{a \in A_n \mid a^d/f^n \in \mathfrak{q}\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{p} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{p}_n.$$

On vérifie aussitôt que $\mathfrak{p} \in D_+(f)$ et que $\psi_f(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$. Donc ψ_f est également surjective. Puisque, pour $a \in S_n$ et $n \geq 0$, $a \in \mathfrak{p}$ si et seulement si $a^d/f^n \in \psi_f(\mathfrak{p})$, on a l'égalité

$$\psi_f^{-1}(D(a^d/f^n)) = D_+(a) \cap D_+(f) = D_+(af). \quad (1)$$

Or, les membres de droite de ces égalités forment une base de la topologie de $D_+(f)$ par 3.3. On sait d'autre part (1.10) que les $D(a^d/f^n)$ forment une base de la topologie de $\text{Spec } S_{(f)}$. On déduit alors de (1) que ψ_f est un homéomorphisme. Vérifions la commutativité des carrés de l'énoncé. Si $\varphi_g^f: S_f \rightarrow S_{fg}$ est le morphisme canonique, un élément $\mathfrak{p} \in D_+(fg)$ est envoyé d'une part sur $(\varphi_f(\mathfrak{p})) \cap S_{(f)}$ et d'autre part sur $(\varphi_g^f)^{-1}((\varphi_{fg}(\mathfrak{p}))) \cap S_{(f)}$; ces deux éléments coïncident car $\varphi_{fg} = \varphi_g^f \varphi_f$.

Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} les préfaisceaux d'anneaux sur $\text{Proj } S$ et $\text{Spec } S_{(f)}$, respectivement, utilisés dans les définitions de ces espaces géométriques. Sur les bases topologiques mises en correspondance par (1), les préfaisceaux \mathcal{F} et \mathcal{G} s'identifient respectivement aux préfaisceaux $D_+(af) \mapsto S_{(af)}$ et $D(a^d/f^n) \mapsto (S_{(f)})_{a^d/f^n}$ ($a \in S_n$, $n \geq 0$). Les isomorphismes canoniques $(S_{(f)})_{a^d/f^n} \xrightarrow{\sim} S_{(af)}$ font commuter les carrés

$$\begin{array}{ccc} S_{(af)} & \longleftarrow & (S_{(f)})_{a^d/f^n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{(abf)} & \longleftarrow & (S_{(f)})_{(ab)^d/f^{m+n}} \end{array}$$

pour $b \in S_m$. On en déduit d'une part qu'ils définissent un isomorphisme $\mathcal{O}_{\psi_f}: \mathcal{O}_{\text{Spec } S_{(f)}} \rightarrow (\psi_f)_*(\mathcal{O}_{D_+(f)})$, et d'autre part que le carré de l'énoncé commute au niveau des faisceaux. \square

Corollaire. *Soit S un anneau gradué et $f \in S_+$ un élément homogène. Les notations étant celles de 3.2, le morphisme canonique $\mathcal{F}(D_+(f)) \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Proj } S}(D_+(f))$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Notons \mathfrak{B} la base des ouverts de la forme $D_+(f)$, $f \in S_+$ homogène. Si \mathfrak{B}_f désigne la base des $D_+(fg)$, $g \in S_+$ homogène, alors \mathfrak{B}_f est la restriction de \mathfrak{B} à $D_+(f)$, car si $D_+(g) \subset D_+(f)$, alors $D_+(g) = D_+(fg)$. La proposition 1.11 et la proposition ci-dessus montrent que \mathcal{F} est un faisceau sur chaque \mathfrak{B}_f , donc aussi sur \mathfrak{B} . \square

3.5 Proposition. *Pour tout anneau gradué S , $\text{Proj } S$ est un schéma séparé.*

Démonstration. On applique le critère 2.17 au recouvrement de $\text{Proj } S$ par les ouverts $D_+(f)$, $f \in S_+$ homogène. La première condition est vérifiée car $D_+(f) \cap D_+(g) = D_+(fg)$ est affine. La deuxième condition signifie que $S_{(fg)}$ est engendré par les images canoniques de $S_{(f)}$ et de $S_{(g)}$. Si $f \in S_d$ et $g \in S_e$, vu l'isomorphisme canonique $\varphi: (S_{(f)})_{g^d/f^e} \xrightarrow{\sim} S_{(fg)}$, $S_{(fg)}$ est engendré par l'image de $S_{(f)}$ et $\varphi(1/(g^d/f^e)) = f^{d+e}/(fg)^d$ qui est l'image de $f^e/g^d \in S_{(g)}$. \square

3.6 Proposition. *Soit $\varphi: S \rightarrow T$ un morphisme d'anneaux gradués. Il existe un unique morphisme de schémas $\text{Proj } \varphi: D_+(\varphi(S_+)) \rightarrow \text{Proj } S$ tel que pour tout $f \in S_+$ homogène, si $\varphi_f: S_{(f)} \rightarrow T_{(\varphi(f))}$ désigne le morphisme induit par φ et $i_f: D_+(f) \hookrightarrow \text{Proj } S$ le morphisme d'inclusion, $\text{Proj } \varphi|_{D_+(\varphi(f))} = i_f \psi_f^{-1}(\text{Spec } \varphi_f) \psi_{\varphi(f)}$.*

Démonstration. Puisque les $D_+(\varphi(f))$ recouvrent $D_+(\varphi(S_+))$, l'unicité est claire. Pour \mathfrak{p} un point de $D_+(\varphi(S_+))$, on pose $(\text{Proj } \varphi)(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. C'est bien un élément de $\text{Proj } S$ car \mathfrak{p} ne contient pas $\varphi(S_+)$. Si U est un ouvert de $\text{Proj } S$, on a alors $\varphi(S_+(U)) \subset S_+((\text{Proj } \varphi)^{-1}(U))$. On prend pour $\mathcal{O}_{\text{Proj } \varphi}$ le morphisme associé au morphisme de préfaisceaux défini par les flèches $(S_+(U)^{-1}S)_0 \rightarrow (S_+((\text{Proj } \varphi)^{-1}(U))T)_0$ induites par φ . Les morphismes induits sur

les fibres s'identifient aux morphismes canoniques locaux $A_{(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))} \rightarrow T_{(\mathfrak{p})}$. Soit $f \in S_+$ homogène. Il est clair par la définition que $(\text{Proj } \varphi)^{-1}(D_+(f)) = D_+(\varphi(f))$, et donc que $\text{Proj } \varphi|_{D_+(\varphi(f))}$ induit un morphisme $D_+(\varphi(f)) \rightarrow D_+(f)$. Vérifions que ce morphisme n'est autre que $i_f \psi_f^{-1}(\text{Spec } \varphi_f) \psi_{\varphi(f)}$. Si f est de degré d et si $\mathfrak{q} \in D_+(\varphi(f))$, alors

$$\begin{aligned} \psi_f^{-1}(\text{Spec } \varphi_f) \psi_{\varphi(f)}(\mathfrak{q}) &= \psi_f^{-1}(\text{Spec } \varphi_f)(\{b^d/\varphi(f)^n \mid b \in T_n \cap \mathfrak{q} \text{ et } n \geq 0\}) \\ &= \psi_f^{-1}(\{a^d/f^n \mid a \in S_n \cap \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \text{ et } n \geq 0\}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}), \end{aligned}$$

ce qui montre que les applications continues sous-jacentes coïncident. D'autre part, pour tout $a \in A_n$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (S_{(f)})_{a^d/f^n} & \longrightarrow & S_{(af)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (T_{(\varphi(f))})_{\varphi(a)^d/\varphi(f)^n} & \longrightarrow & T_{(\varphi(af))} \end{array}$$

où les flèches horizontales s'identifient aux isomorphismes \mathcal{O}_{ψ_f} et $\mathcal{O}_{\psi_{\varphi(f)}}$ sur les ouverts $D_+(af)$ et $D_+(\varphi(af))$ et où les flèches verticales s'identifient à $\mathcal{O}_{\text{Spec } \varphi_f}$ et à $\mathcal{O}_{\text{Proj } \varphi}$ sur ces ouverts. Puisque les $D_+(af)$ forment une base de la topologie de $D_+(f)$, cela prouve notre assertion. \square

Si $\psi: T \rightarrow U$ est un autre morphisme d'anneaux gradués et si $f: D_+(\psi\varphi(S_+)) \rightarrow D_+(\varphi(S_+))$ désigne le morphisme induit par $\text{Proj } \psi$, alors on déduit de cette proposition que $\text{Proj}(\psi\varphi) = (\text{Proj } \varphi)f$.

3.7 Soient S un anneau gradué, M un S -module gradué et \mathcal{F} le préfaisceau d'anneaux de 3.2. On définit sur $X = \text{Proj } S$ un \mathcal{F} -module \mathcal{M} en posant $\mathcal{M}(U) = (S_+(U)^{-1}M)_0$ avec les restrictions canoniques. Le X -module associé à \mathcal{M} est noté \tilde{M} . L'application $M \mapsto \tilde{M}$ est visiblement fonctorielle : pour un morphisme de A -modules gradués $\mu: M \rightarrow N$, le morphisme de X -modules $\tilde{\mu}: \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ est associé au morphisme de préfaisceaux défini sur un ouvert U par $(S_+(U)^{-1}\mu)_0: (S_+(U)^{-1}M)_0 \rightarrow (S_+(U)^{-1}N)_0$. De plus, $\tilde{?}: \text{grMod}_S \rightarrow \text{Mod}_X$ est un foncteur additif. Notons que \tilde{S} n'est autre que le X -module \mathcal{O}_X .

Proposition. *Soient S un anneau gradué, M un S -module gradué et $f \in S_+$ un élément homogène. Alors $(\psi_f)_*(\tilde{M}|_{D_+(f)})$ est naturellement isomorphe à $(M_{(f)})^\sim$. En particulier, \tilde{M} est quasi-cohérent.*

Démonstration. Soit d le degré de f . Rappelons que l'on a une correspondance $\psi_f^{-1}(D(a^d/f^n)) = D_+(af)$ entre bases topologiques de $\text{Spec } S_{(f)}$ et $D_+(f)$ (3.4 (1)). La proposition découle alors du fait que les isomorphismes naturels $M_{(af)} \xrightarrow{\sim} (M_{(f)})_{a^d/f^n}$ commutent aux morphismes de restriction et induisent par passage aux faisceaux associés l'isomorphisme cherché. \square

Corollaire. *Soient S un anneau gradué et $X = \text{Proj } S$. Le foncteur $\tilde{?}: \text{grMod}_S \rightarrow \text{Mod}_X$ est exact.*

Démonstration. En effet, il suffit de vérifier l'exactitude après composition avec chacun des foncteurs $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}_x$. Mais si $x \in D_+(f)$, cette composition est isomorphe au foncteur $M \mapsto ((M_{(f)})^\sim)_x$ par la proposition, et ce foncteur est exact par 2.4 et le fait que la localisation et le passage aux fibres sont des foncteurs exacts. \square

3.8 Soient S un anneau gradué et $X = \text{Proj } S$. Le foncteur $\tilde{?}: \text{grMod}_S \rightarrow \text{Mod}_X$ induit un foncteur $\overline{\text{gr}}\text{Mod}_S \rightarrow \text{Mod}_X$. En effet, si μ est un élément de $\text{grMod}_S(M, N)$ qui est nul dans $\overline{\text{gr}}\text{Mod}_S(M, N)$, alors pour tout $f \in S_+$ homogène, le morphisme $M_{(f)} \rightarrow N_{(f)}$ induit par μ est nul, donc $\tilde{\mu} = 0$. Par le corollaire 3.7, il s'ensuit que pour que $\tilde{\mu}$ soit un monomorphisme (resp. un épimorphisme; un isomorphisme), il suffit que μ soit un quasi-monomorphisme (resp. un quasi-épimorphisme; un quasi-isomorphisme).

3.9 Soient S un anneau gradué, M et N des S -modules gradués et $X = \text{Proj } S$. Si $f \in S_+$ est homogène, on a un morphisme naturel de $S_{(f)}$ -modules $\lambda_f: M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)} \rightarrow (M \otimes_S N)_{(f)}$

défini par $\lambda_f((x/f^m) \otimes (y/f^n)) = (x \otimes y)/f^{m+n}$; c'est un isomorphisme si f est de degré 1 (voir par exemple EGA II, proposition 2.5.13).

Ces morphismes λ_f définissent un morphisme de préfaisceaux de modules sur \mathcal{O}_X sur la base des ouverts $D_+(f)$, $f \in S_+$ homogène, d'où un morphisme naturel de X -modules

$$\lambda: \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N} \rightarrow (M \otimes_S N)^\sim.$$

Si S est engendré par S_1 en tant que S_0 -algèbre, comme X est recouvert par les ouverts $D_+(f)$ (3.3), f de degré 1, λ est un isomorphisme. Le morphisme λ est associatif, c'est-à-dire fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{P} & \longrightarrow & \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} (N \otimes_S P)^\sim \\ \downarrow & & \downarrow \\ (M \otimes_S N)^\sim \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{P} & \longrightarrow & (M \otimes_S N \otimes_S P)^\sim, \end{array}$$

car les morphismes λ_f font commuter les diagrammes analogues.

3.10 Soient $\varphi: S \rightarrow T$ un morphisme d'anneaux gradués, M un S -module gradué et N un T -module gradué. Notons $U = D_+(\varphi(S_+))$. Soit $f \in S_+$ un élément homogène. On note $\varphi_f: S_{(f)} \rightarrow T_{(\varphi(f))}$ le morphisme induit par φ . En utilisant les propositions 3.6, 3.7 et 2.6, on a une suite d'isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} (\text{Proj } \varphi)_*(\tilde{N}|U)|D_+(f) &= (\text{Proj } \varphi|D_+(\varphi(f)))_*(\tilde{N}|D_+(\varphi(f)))|D_+(f) \\ &= (\psi_f)^*(\text{Spec } \varphi_f)_*(\psi_{\varphi(f)})_*(\tilde{N}|D_+(\varphi(f))) \simeq (\psi_f)^*(\text{Spec } \varphi_f)_*(N_{(\varphi(f))})^\sim \\ &\simeq (\psi_f)^*(\varphi_f(N_{(\varphi(f))}))^\sim = (\psi_f)^*((\varphi N)_{(f)})^\sim \simeq (\varphi N)^\sim|D_+(f). \end{aligned}$$

De plus, on sait déjà que chacun de ces isomorphismes est compatible avec les morphismes de restriction de $D_+(f)$ vers $D_+(fg)$. On obtient donc un isomorphisme naturel $(\text{Proj } \varphi)_*(\tilde{N}|U) \simeq (\varphi N)^\sim$. En utilisant les mêmes propositions ainsi que le morphisme λ_f de 3.9, on a une suite de morphismes naturels

$$\begin{aligned} (M \otimes_S T)^\sim|D_+(\varphi(f)) &\simeq (\psi_{\varphi(f)})^*((M \otimes_S T)_{(\varphi(f))})^\sim \\ &\rightarrow (\psi_{\varphi(f)})^*(M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} B_{(\varphi(f))})^\sim \simeq (\psi_{\varphi(f)})^*(\text{Spec } \varphi_f)^*(M_{(f)})^\sim \\ &\simeq (\psi_{\varphi(f)})^*(\text{Spec } \varphi_f)^*(\psi_f^{-1})^*(\tilde{M}|D_+(f)) = (\text{Proj } \varphi)^*(\tilde{M})|D_+(\varphi(f)) \end{aligned}$$

qui définissent un morphisme naturel $(M \otimes_S T)^\sim|U \rightarrow (\text{Proj } \varphi)^*(\tilde{M})$. Si S est engendré par S_1 en tant que S_0 -algèbre, alors ce morphisme est inversible car λ_f l'est (3.9).

3.11 Soient S un anneau gradué. Si M est un S -module gradué et $n \in \mathbf{Z}$, on note $M(n)$ le S -module gradué égal à M en tant que S -module et dont les éléments homogènes de degré m sont les éléments homogènes de M de degré $m+n$. En tant que S -module gradué, $M(n)$ s'identifie à $M \otimes_S S(n)$.

Soit $X = \text{Proj } S$ et $n \in \mathbf{Z}$. On note $\mathcal{O}_X(n)$ le X -module $S(n)^\sim$, et si \mathcal{M} est un X -module, on note $\mathcal{M}(n)$ le X -module $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$. Pour $n=0$ on a donc $\mathcal{O}_X(0) = \mathcal{O}_X$ et $\mathcal{M}(0) = \mathcal{M}$. Lorsque \mathcal{M} est de la forme \tilde{M} pour un S -module gradué M , alors par 3.9 on a un morphisme canonique

$$\tilde{M}(n) \rightarrow M(n)^\sim \tag{2}$$

qui est un isomorphisme pour autant que S soit engendré par S_1 en tant que S_0 -algèbre. En particulier, comme $S(m) \otimes_S S(n)$ s'identifie à $S(m+n)$ pour tous m et n , on a sous cette hypothèse des isomorphismes canoniques $\mathcal{O}_X(m) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) \simeq \mathcal{O}_X(m+n)$.

Proposition. Soient S un anneau gradué engendré par S_1 en tant que S_0 -algèbre et $X = \text{Proj } S$. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, le X -module $\mathcal{O}_X(n)$ est inversible.

Démonstration. Par l'hypothèse sur S , X est réunion des ouverts $D_+(f)$ pour $f \in S_1$. On va montrer que $\mathcal{O}_X(n)|_{D_+(f)}$ est libre de rang 1 pour tout $f \in S_1$. Soit $\psi_f: D_+(f) \xrightarrow{\sim} \text{Spec } S_{(f)}$ l'isomorphisme de 3.4. Par la proposition 3.7, on a un isomorphisme $(\psi_f)_*(\mathcal{O}_X(n)|_{D_+(f)}) \xrightarrow{\sim} (S(n)_{(f)})^\sim$. Il reste à observer que, comme f est de degré 1, $S(n)_{(f)}$ est isomorphe à $S_{(f)}$ en tant que $S_{(f)}$ -module pour tout $n \in \mathbf{Z}$, l'isomorphisme étant donné par $x/f^k \mapsto x/f^{k+n}$. \square

3.12 Soient S un anneau gradué engendré par S_1 en tant que S_0 -algèbre et $X = \text{Proj } S$. Si \mathcal{M} est un X -module, on note $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ l'anneau gradué $\Gamma_*(\mathcal{O}_X(1), \mathcal{O}_X)$ et $\Gamma_*(\mathcal{M})$ le $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ -module gradué $\Gamma_*(\mathcal{O}_X(1), \mathcal{M})$ (2.10). En vertu des isomorphismes canoniques $\mathcal{O}_X(m) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(m+n)$ (3.11) et de leur associativité (3.9), on peut identifier les anneaux gradués $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ et $\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_X(n)(X)$ ainsi que les modules gradués $\Gamma_*(\mathcal{M})$ et $\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{M}(n)(X)$. Si M est un S -module gradué, on note $\eta_M: M \rightarrow \Gamma_*(\tilde{M})$ le morphisme de groupes abéliens gradués défini en degré n par la composition des flèches canoniques $M_n = M(n)_0 \rightarrow M(n)^\sim(X) \xrightarrow{\sim} \tilde{M}(n)(X)$, la première flèche étant le passage au faisceau associé et la deuxième l'isomorphisme réciproque du morphisme (2) de 3.11. Il est clair par définition du produit dans $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ que $\eta_S: S \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ est un morphisme d'anneaux gradués, qui donne à $\Gamma_*(\mathcal{M})$ une structure de S -module gradué pour tout X -module \mathcal{M} , et on voit aussitôt que η_M est un morphisme de S -modules gradués.

Proposition. *Soient S un anneau gradué engendré par S_1 en tant que S_0 -algèbre et $X = \text{Proj } S$. Pour tout $f \in S_+$ homogène, $D_+(f) = X_{\eta_S(f)}$.*

Démonstration. Soit d le degré de f . Par l'hypothèse sur S et 3.3, X est réunion des ouverts $D_+(g)$ pour $g \in S_1$. Fixons un tel g et soit $Y = \text{Spec } S_{(g)}$. Il suffit donc de montrer que $D_+(fg) = D_+(g)_{\eta_S(f)|_{D_+(g)}}$. Appliquant l'isomorphisme ψ_g de chaque côté, l'égalité à montrer devient

$$D(f/g^d) = Y_{\eta_S(f)|_{D_+(g)}}.$$

On a des isomorphismes de Y -modules

$$(\psi_g)_*(\mathcal{O}_X(d)|_{D_+(g)}) \xrightarrow{\sim} (S(d)_{(g)})^\sim \xrightarrow{\sim} (S_{(g)})^\sim,$$

le premier étant celui de la proposition 3.7 et le second étant déduit de l'isomorphisme de $S_{(g)}$ -modules $S(d)_{(g)} \xrightarrow{\sim} S_{(g)}$ (g étant de degré 1). Au-dessus de Y , on a donc un isomorphisme $\mathcal{O}_X(d)(D_+(g)) \xrightarrow{\sim} (S_{(g)})^\sim(Y) \xrightarrow{\sim} S_{(g)}$, et il s'agit donc de montrer que $\eta_S(f)|_{D_+(g)}$ se transforme en $f/g^d \in S_{(g)}$ par cet isomorphisme, ce qui est évident par les définitions. \square

3.13 Théorème. *Soient S un anneau gradué engendré par S_1 en tant que S_0 -algèbre et $X = \text{Proj } S$. Le foncteur $\Gamma_*: \text{Mod}_X \rightarrow \text{grMod}_S$ est adjoint à droite au foncteur $\tilde{?}: \text{grMod}_S \rightarrow \text{Mod}_X$.*

Démonstration. Soit M un S -module gradué. Pour montrer le théorème, il suffit de vérifier que η_M (3.12) est une flèche universelle de M vers Γ_* , pour tout S -module M . Considérons donc une flèche $\mu: M \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{M})$ où \mathcal{M} est un X -module. On lui associe un morphisme $\mu^\sharp: \tilde{M} \rightarrow \mathcal{M}$ comme suit. Soit $f \in S_+$. Par la proposition 3.12, $D_+(f) = X_{\eta_S(f)}$. Compte tenu de η_S , le morphisme (1) de 2.11 prend la forme

$$\Gamma_*(\mathcal{M})_{(f)} \rightarrow \mathcal{M}(D_+(f));$$

en composant avec $\mu_{(f)}$, on obtient un morphisme $M_{(f)} \rightarrow \mathcal{M}(D_+(f))$. Lorsque f varie, ces morphismes sont compatibles avec les morphismes de restriction (2.11) et définissent donc un morphisme de préfaisceaux de modules, dont le morphisme de X -modules associé est le morphisme cherché $\mu^\sharp: \tilde{M} \rightarrow \mathcal{M}$. Il reste à montrer que les applications $\mu \mapsto \mu^\sharp$ et $\nu \mapsto \Gamma_*(\nu)\eta_M$ sont des bijections réciproques entre $\text{grMod}_S(M, \Gamma_*(\mathcal{M}))$ et $\text{Mod}_X(\tilde{M}, \mathcal{M})$. Vérifions d'abord que $\mu_n = (\Gamma_*(\mu^\sharp)\eta_M)_n$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Il suffit de montrer que l'égalité est vraie après composition avec le morphisme de restriction $\mathcal{M}(n)(X) \rightarrow \mathcal{M}(n)(D_+(f))$ pour tout $f \in S_1$, car $\mathcal{M}(n)$ est un faisceau. On doit donc montrer que le morphisme $M_n \rightarrow \mathcal{M}(n)(D_+(f))$ déduit de μ_n coïncide avec la composition

$$M_n \rightarrow M(n)_{(f)} \xrightarrow{\mu(n)_{(f)}} \Gamma_*(\mathcal{M})_{(f)} \xrightarrow{\sim} \Gamma_*(\mathcal{M}(n))_{(f)} \rightarrow \mathcal{M}(n)(D_+(f)).$$

On le vérifie sur les éléments. Un élément $x \in M_n$ est successivement envoyé par cette composition sur $(f/1)^n(x/f^n)$, $(f/1)^n(\mu(x)/f^n)$, et finalement sur

$$(\eta_S(f)^n|_{D_+(f)})(\mu(x)|_{D_+(f)})(\eta_S(f)^n|_{D_+(f)})^{-1} = \mu(x)|_{D_+(f)}.$$

Pour voir que $\nu = (\Gamma_*(\nu)\eta_M)^\sharp$, il suffit de remarquer que ν fait commuter les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} M_{(f)} & \xrightarrow{(\eta_M)_{(f)}} & \Gamma_*(\tilde{M})_{(f)} & \xrightarrow{\Gamma_*(\nu)_{(f)}} & \Gamma_*(\mathcal{M})_{(f)} \\ & \searrow \sim & \downarrow & & \downarrow \\ & & \tilde{M}(D_+(f)) & \xrightarrow{\nu_{D_+(f)}} & \mathcal{M}(D_+(f)) \end{array}$$

pour tout $f \in S_+$ homogène par naturalité des flèches verticales (2.11), et que $(\Gamma_*(\nu)\eta_M)^\sharp$ est, par définition, l'unique telle flèche. \square

3.14 Proposition. *Soient S un anneau gradué finiment engendré par S_1 en tant que S_0 -algèbre, $X = \text{Proj } S$ et \mathcal{M} un X -module quasi-cohérent. Alors la counité $\varepsilon_{\mathcal{M}} : \Gamma_*(\mathcal{M})^\sim \rightarrow \mathcal{M}$ de l'adjonction de 3.13 est un isomorphisme.*

Démonstration. Par définition, $\varepsilon_{\mathcal{M}} = (\text{id}_{\Gamma_*(\mathcal{M})})^\sharp$ est associé au morphisme de préfaisceaux qui sur un ouvert $D_+(f) = X_{\eta_S(f)}$ est le morphisme (1) de 2.11. De plus, X est concentré car il est séparé (3.5) et tout ouvert spécial de X est réunion finie d'ouverts affines par l'hypothèse sur S et 3.3. La proposition est donc un cas particulier de 2.12. \square

En particulier, sous les hypothèses de la proposition, le foncteur $\Gamma_* : \text{Qcoh}_X \rightarrow \text{grMod}_S$ est pleinement fidèle.

3.15 Proposition. *Soient A un anneau, $r \geq 1$, $S = A[x_0, \dots, x_r]$ et $X = \text{Proj } S$. L'unité $\eta_S : S \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ de l'adjonction de 3.13 est un isomorphisme.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que le morphisme canonique

$$S_n = S(n)_0 \rightarrow (S_+(X)^{-1}S(n))_0 \rightarrow S(n)^\sim(X)$$

est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbf{Z}$. La première flèche est ici un isomorphisme car, r étant au moins 1, l'idéal engendré par un élément homogène non inversible de S ne contient pas S_+ . Soit \mathfrak{B} la base de la topologie de X formée des $D_+(f)$, $f \in S_+$ homogène. Il suffit donc de montrer que le préfaisceau \mathcal{F} de 3.2 est déjà un faisceau sur la base $\mathfrak{B} \cup \{X\}$. Sachant que c'est le cas sur la base \mathfrak{B} (corollaire 3.4) et que tous les éléments de \mathfrak{B} sont inclus dans un $D_+(x_i)$, il suffit de vérifier que la suite

$$0 \rightarrow S_n \rightarrow \prod_i S(n)_{(x_i)} \rightrightarrows \prod_{i,j} S(n)_{(x_i x_j)}$$

est exacte pour tout $n \in \mathbf{Z}$, ou, ce qui revient au même, que la suite

$$0 \rightarrow S \rightarrow \prod_i S_{x_i} \rightrightarrows \prod_{i,j} S_{x_i x_j}$$

est exacte. Mais ceci est trivial sachant que les x_i ne sont pas des diviseurs de zéro. \square

Chapitre II

Cohomologie

§1 Cohomologie des faisceaux

1.1 Proposition. *Soit X un espace annelé. La catégorie Mod_X possède suffisamment d'objets injectifs.*

Démonstration. L'assertion est évidemment vraie si X est réduit à un point, car on a alors une équivalence entre Mod_X et $\text{Mod}_{\mathcal{O}(X)}$. En général, soit \mathcal{M} un X -module, et pour chaque point $x \in X$, soit $i_x: \{x\} \hookrightarrow X$ le morphisme d'inclusion et $\nu_x: (i_x)^*(\mathcal{M}) \hookrightarrow I_x$ un monomorphisme de $\{x\}$ -modules où I_x est injectif. Notons que le foncteur $(i_x)^*: \text{Mod}_X \rightarrow \text{Mod}_{\{x\}}$ est exact et s'identifie d'ailleurs au foncteur $\mathcal{N} \mapsto \mathcal{N}_x$. De plus, la counité de l'adjonction $(i_x)^*, (i_x)_*: \text{Mod}_X \rightleftarrows \text{Mod}_{\{x\}}$ (I 2.1) est visiblement un isomorphisme. Cette adjonction implique en particulier que les foncteurs $\text{Mod}_X(?, (i_x)_*(I_x))$ et $\text{Mod}_{\{x\}}((i_x)^*(?), I_x)$ sont isomorphes; puisque le second est exact, le X -module $(i_x)_*(I_x)$ est injectif pour tout $x \in X$, et donc aussi $\mathcal{I} = \prod_{x \in X} (i_x)_*(I_x)$. Soit $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}$ le morphisme de X -modules induit par les morphismes $\nu_x: \mathcal{M} \rightarrow (i_x)_*(I_x)$. On montre que c'est un monomorphisme en le vérifiant sur chaque fibre. Si $x \in X$, par les propriétés des adjonctions, ν_x est le composé

$$(i_x)^*(\mathcal{M}) \xrightarrow{(i_x)^*(\nu_x^b)} (i_x)^*(i_x)_*(I_x) \xrightarrow{\simeq} I_x,$$

et ainsi $(i_x)^*(\nu_x^b) = (i_x)^*(p_x \mu)$ est un monomorphisme. Il en est donc de même de $(i_x)^*(\mu)$. \square

Dans ce chapitre, nous allons formuler autant que possible les résultats en termes d'espaces annelés et de X -modules. Tous ces résultats s'appliqueront aussi au cas d'un espace topologique et d'un faisceau de groupes abéliens. En effet, si X est un espace topologique et si l'on prend pour \mathcal{O}_X le faisceau simple de fibre \mathbf{Z} , la catégorie Ab_X est isomorphe à la catégorie Mod_X .

1.2 Soit X un espace annelé. Pour $n \geq 0$, on note $H^n(X, ?)$ le n -ième foncteur dérivé à droite de $\Gamma(X, ?)$, qui existe en vertu de la proposition 1.1. Si \mathcal{M} est un X -module, le $\mathcal{O}(X)$ -module $H^n(X, \mathcal{M})$ est appelé le n -ième module de cohomologie de X à coefficients dans \mathcal{M} . Comme le foncteur $\Gamma(X, ?)$ commute aux limites projectives (2.1), $\Gamma(X, ?)$ est exact à gauche et s'identifie donc au foncteur $H^0(X, ?)$.

Rappelons ici la construction des foncteurs $H^n(X, ?)$. La discussion qui suit est valable dans une catégorie abélienne quelconque en remplaçant $\Gamma(X, ?)$ par un foncteur additif à valeur dans une catégorie abélienne quelconque, mais nous formulons tout de suite les résultats en termes de X -modules par commodité. On appelle complexe de cochaînes augmenté tout complexe de la forme $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^\bullet$. Un morphisme d'un complexe augmenté $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^\bullet$ vers un complexe augmenté $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}^\bullet$ consiste en un morphisme $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ et en un morphisme de complexes $\mu^\bullet: \mathcal{M}^\bullet \rightarrow \mathcal{N}^\bullet$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}^0 \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu^0 \\ \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{N}^0, \end{array}$$

soit commutatif. On exprime aussi la commutativité de ce diagramme en disant que μ^\bullet est un μ -morphisme, ou un \mathcal{M} -morphisme lorsque $\mu = \text{id}$ (avec ce langage, les augmentations des complexes en question sont souvent sous-entendus).

Un résultat élémentaire d'algèbre homologique affirme que si $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^\bullet$ est une résolution de \mathcal{M} et si \mathcal{N}^n est injectif pour tout n , alors pour tout morphisme $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ il existe une unique classe d'homotopie de μ -morphisms $\mathcal{M}^\bullet \rightarrow \mathcal{N}^\bullet$. Après application du foncteur additif $\Gamma(X, ?)$, on déduit donc de μ un morphisme uniquement déterminé

$$H^\bullet(\mathcal{M}^\bullet(X)) \rightarrow H^\bullet(\mathcal{N}^\bullet(X)), \quad (1)$$

qui par le résultat cité est évidemment naturel en les complexes augmentés considérés. Supposons maintenant que $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^\bullet$ et $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}^\bullet$ soient des résolutions injectives et que $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ soit un isomorphisme. Alors il est clair que tout μ -morphisme $\mathcal{M}^\bullet \rightarrow \mathcal{N}^\bullet$ est une équivalence d'homotopie; en particulier, le morphisme (1) est un isomorphisme. Le foncteur $H^\bullet(X, ?)$ est alors défini en fixant une fois pour toutes une résolution injective $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}_\mathcal{M}^\bullet$ pour chaque X -module \mathcal{M} et en posant $H^\bullet(X, ?) = H^\bullet(\mathcal{I}_\mathcal{M}^\bullet(X))$.

On dit qu'un X -module \mathcal{M} est *acyclique pour* $\Gamma(X, ?)$ s'il admet une résolution injective $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$ telle que le complexe $\mathcal{I}^\bullet(X)$ soit acyclique, c'est-à-dire si $H^n(X, \mathcal{M}) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Tout X -module injectif \mathcal{I} est acyclique pour $\Gamma(X, ?)$ car il possède la résolution $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow 0$. Étant donné une résolution $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^\bullet$ de \mathcal{M} , une résolution injective $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}^\bullet$ de \mathcal{N} et un isomorphisme $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, pour que le morphisme (1) défini par ces données soit un isomorphisme, il suffit que \mathcal{M}^n soit acyclique pour $\Gamma(X, ?)$ pour tout n (on parle alors d'une *résolution* $\Gamma(X, ?)$ -*acyclique* de \mathcal{M}).

Rappelons finalement que $H^\bullet(X, ?)$ est un δ -foncteur jouissant de la propriété universelle suivante : pour tout δ -foncteur T^\bullet de la catégorie Mod_X à valeurs dans la catégorie des $\mathcal{O}(X)$ -modules et toute transformation naturelle $\tau: H^0(X, ?) \rightarrow T^0$, il existe un unique morphisme de δ -foncteurs $H^\bullet(X, ?) \rightarrow T^\bullet$ induisant τ en degré 0.

1.3 Soit X un espace annelé. Rappelons l'existence du foncteur additif qui à tout X -module \mathcal{M} associe le faisceau $\mathcal{D}^0(\mathcal{M})$ des sections discontinues de \mathcal{M} , une telle section sur un ouvert U étant un élément de $\prod_{x \in U} \mathcal{M}_x$. Autrement dit, si $i_x: \{x\} \rightarrow X$ est l'inclusion du point x ,

$$\mathcal{D}^0(\mathcal{M}) = \prod_{x \in X} (i_x)_*(i_x)^*(\mathcal{M}).$$

Il est évident que $\mathcal{D}^0(\mathcal{M})$ est flasque. Le foncteur $\mathcal{D}^0: \text{Mod}_X \rightarrow \text{Mod}_X$ est exact. En effet, il est même exact après composition avec le foncteur oubli $\text{Mod}_X \rightarrow \text{Mod}_{\bar{X}}$, car toute suite exacte de X -modules $0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow 0$ se transforme au-dessus d'un ouvert U en la suite

$$0 \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{M}_x \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{N}_x \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{P}_x \rightarrow 0$$

qui est exacte.

1.4 On va utiliser le foncteur \mathcal{D}^0 pour définir une *résolution canonique* d'un X -module qui nous permettra de calculer sa cohomologie et qui possédera les propriétés avantageuses d'avoir une structure cosimpliciale et d'être contractile sur chaque fibre. Comme pour tout $x \in X$ les foncteurs $(i_x)^*$ et $(i_x)_*$ forment un couple adjoint, le foncteur $(i_x)_*(i_x)^*$ est muni d'une structure canonique de monade dans Mod_X : si η_x et ε_x désignent l'unité et la counité de cette adjonction, cette monade a pour unité η_x et pour produit $\mu_x = (i_x)_*(\varepsilon_{x, (i_x)^*(?)})$. On en déduit une structure de monade sur le foncteur produit \mathcal{D}^0 , dont l'unité est la transformation naturelle $\eta: \text{id} \rightarrow \mathcal{D}^0$ de composantes η_x , et dont le produit $\mu: \mathcal{D}^0 \mathcal{D}^0 \rightarrow \mathcal{D}^0$ est $\prod_{x \in X} \mu_x (i_x)_*(i_x)^*(p_x)$ où $p_x: \mathcal{D}^0 \rightarrow (i_x)_*(i_x)^*$ est la projection. On peut donc former le complexe cosimplicial augmenté associé à cette monade, qui est de la forme

$$\text{id} \xrightarrow{\eta} \mathcal{D}^0 \rightarrow \mathcal{D}^1 \rightarrow \mathcal{D}^2 \rightarrow \dots$$

où \mathcal{D}^n est le foncteur \mathcal{D}^0 itéré $n + 1$ fois ; pour tout X -module \mathcal{M} et tout $n \geq 0$, le X -module $\mathcal{D}^n(\mathcal{M})$ est donc flasque. On notera $\text{id} \rightarrow \mathcal{D}^\bullet$ ce complexe cosimplicial augmenté. Rappelons-en rapidement quelques propriétés. Les opérateurs de coface et de codégénérescence sont donnés

par les formules $\delta^i = \mathcal{D}^{i-1}(\eta_{\mathcal{D}^{n-i-1}(?)}) : \mathcal{D}^{n-1} \rightarrow \mathcal{D}^n$ et $\sigma^i = \mathcal{D}^{i-1}(\mu_{\mathcal{D}^{n-i-1}(?)}) : \mathcal{D}^{n+1} \rightarrow \mathcal{D}^n$ ($0 \leq i \leq n$), avec la convention $\mathcal{D}^{-1} = \text{id}$. En général, pour que le complexe cosimplicial augmenté associé à une monade dans une catégorie abélienne soit contractile, il suffit que l'unité de cette monade ait une rétraction. Ici, c'est le cas de chacune des monades induites sur les fibres par la monade ci-dessus. En effet, si on définit un morphisme naturel $\mathcal{D}^0(\mathcal{M})_x \rightarrow \mathcal{M}_x$ en associant au germe d'une section discontinue $(s_y)_{y \in U}$ de \mathcal{M} au-dessus d'un voisinage U de x sa composante s_x , il est clair que l'on obtient une rétraction de l'unité $(i_x)^*(\eta_{\mathcal{M}}) : \mathcal{M}_x \rightarrow \mathcal{D}^0(\mathcal{M})_x$.

On a donc défini une résolution cosimpliciale fonctorielle sur la catégorie des X -modules, qui est naturellement contractile sur chaque fibre. On verra plus loin (proposition 1.7) que le morphisme canonique $H^*(\mathcal{D}^*(?)(X)) \rightarrow H^*(X, ?)$ qui en résulte (1.2) est un isomorphisme.

1.5 Proposition. *Soit X un espace annelé. Tout X -module injectif est flasque.*

Démonstration. Soit \mathcal{I} un X -module injectif. Le morphisme canonique $\eta_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}^0(\mathcal{I})$ de 1.4 est clairement un monomorphisme. Puisque \mathcal{I} est injectif, c'est un facteur direct de $\mathcal{D}^0(\mathcal{I})$ qui est flasque (1.3), donc il existe un faisceau \mathcal{G} tel que $\mathcal{I} \oplus \mathcal{G}$ soit flasque. Sachant que les foncteurs $\Gamma(U, ?)$ commutent aux somme finies, on en déduit que \mathcal{I} est flasque. \square

1.6 Proposition. *Soient X un espace annelé et $0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow 0$ une suite exacte dans Mod_X . Si \mathcal{M} est flasque, alors cette suite est exacte dans $\text{Mod}_{\bar{X}}$. Si en outre \mathcal{N} est flasque, il en va de même pour \mathcal{P} .*

Démonstration. La deuxième assertion est un corollaire évident de la première. Supposons \mathcal{M} flasque et soit $U \subset X$ un ouvert. Il s'agit de montrer que la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{N}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U) \rightarrow 0$$

est exacte. On sait déjà (2.1) que $\Gamma(U, ?)$ est exacte à gauche, donc il reste à montrer que le morphisme $\mathcal{N}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U)$ est surjectif. Fixons $s \in \mathcal{P}(U)$. Soit E l'ensemble des paires (V, t) où $V \subset U$ est un ouvert et $t \in \mathcal{N}(V)$ est une préimage de $s|_V$, que l'on ordonne en posant $(V, t) \leq (V', t')$ si $V \subset V'$ et $t'|_V = t$. Comme \mathcal{N} est un faisceau, il est clair que E est un ensemble inductif. Soit (V, t) un élément maximal de E et soit $x \in U$. Puisque $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$ est un épimorphisme de faisceaux, il existe un voisinage V' de x dans U et une section t' de \mathcal{N} au-dessus de V' qui soit préimage de $s|_{V'}$. Il s'ensuit que $t|_{V \cap V'} - t'|_{V \cap V'}$ est une préimage de $0 \in \mathcal{P}(V \cap V')$, et donc $t|_{V \cap V'} - t'|_{V \cap V'}$ est l'image d'une section de \mathcal{M} au-dessus de $V \cap V'$, qui se prolonge en une section r au-dessus de V' . Ajoutant à t' l'image de r , on peut donc supposer que $t|_{V \cap V'} = t'|_{V \cap V'}$. On peut alors recoller les section t et t' pour obtenir une section $t'' \in \mathcal{N}(V \cup V')$ préimage de $s|_{V \cup V'}$, ce qui montre que $(V, t) \leq (V \cup V', t'')$. Par maximalité de (V, t) , x appartient à V , donc $V = U$ et t est la préimage de s cherchée. \square

1.7 Proposition. *Soit X un espace annelé. Tout X -module flasque est acyclique pour $\Gamma(X, ?)$.*

Démonstration. On prouve par récurrence sur $n \geq 1$ que $H^n(X, \mathcal{M}) = 0$ pour tout X -module flasque \mathcal{M} . Soit \mathcal{M} un X -module flasque. Par la proposition 1.1, il existe dans Mod_X une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0$$

où \mathcal{I} est injectif. On étudie la longue suite exacte associée

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{I}(X) \rightarrow \mathcal{N}(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{M}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{I}) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H^{n-1}(X, \mathcal{N}) \rightarrow H^n(X, \mathcal{M}) \rightarrow H^n(X, \mathcal{I}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Puisque \mathcal{I} est injectif, il est en particulier acyclique pour $\Gamma(X, ?)$. Par la proposition 1.6, $\mathcal{I}(X) \rightarrow \mathcal{N}(X)$ est un épimorphisme, donc $H^1(X, \mathcal{M}) \simeq H^1(X, \mathcal{I}) = 0$. Soit $n \geq 2$. Par la proposition 1.5, \mathcal{I} est flasque, et par la proposition 1.6, \mathcal{N} est flasque. Par hypothèse de récurrence, $H^{n-1}(X, \mathcal{N}) = 0$, donc $H^n(X, \mathcal{M}) \simeq H^n(X, \mathcal{I}) = 0$. \square

1.8 Proposition. Soient X et Y deux espaces annelés partageant le même espace topologique sous-jacent et soit $\varphi: \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ un morphisme de faisceau d'anneaux. Notons F et G les restrictions des scalaires $\mathbf{Mod}_X \rightarrow \mathbf{Mod}_Y$ et $\mathbf{Mod}_{\mathcal{O}(X)} \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathcal{O}(Y)}$ associées à φ et à φ_X . Alors il existe un isomorphisme de δ -foncteurs $H^\bullet(Y, F(?)) \simeq GH^\bullet(X, ?)$.

Démonstration. Cela découle de la théorie générale des foncteurs dérivés sachant que les foncteurs $\Gamma(X, ?)$ et $\Gamma(Y, ?)$ sont exacts à gauche, que les foncteurs F et G sont exacts, et que, en vertu des propositions 1.5 et 1.7, F transforme les objets injectifs en objets acycliques pour $\Gamma(X, ?)$. \square

1.9 Nous rappelons quelques résultats formels concernant les doubles complexes. Ceux que nous considérerons seront toujours à degrés positifs. Un double complexe $C^{\bullet\bullet}$ dans une catégorie abélienne quelconque consiste en une famille d'objets $(C^{pq})_{p,q \in \mathbf{N}}$ munie pour tous p et q de morphismes $d_v^{pq}: C^{pq} \rightarrow C^{p+1,q}$ et $d_h^{pq}: C^{pq} \rightarrow C^{p,q+1}$, appelés *différentielles verticales* et *horizontales*, respectivement, soumis aux relations $d_v d_v = 0$, $d_h d_h = 0$ et $d_v d_h + d_h d_v = 0$. Les doubles complexes dans une catégorie abélienne donnée forment bien sûr une catégorie, qui est d'ailleurs abélienne. Pour tout $p \geq 0$ (resp. $q \geq 0$), l'homologie du complexe $C^{p\bullet}$ (resp. $C^{\bullet q}$) est notée $H_h^{p\bullet}(C)$ (resp. $H_v^{\bullet q}(C)$). Les objets gradués $H_h^{p\bullet}(C)$ (resp. $H_v^{\bullet q}(C)$) forment eux-mêmes des complexes avec les différentielles induites par d_v (resp. d_h).

À un tel double complexe $C^{\bullet\bullet}$ on peut associer fonctoriellement un complexe simple C_\oplus^\bullet défini en degré n par $C_\oplus^n = \bigoplus_{p+q=n} C^{pq}$ et dont la différentielle est $d_\oplus = d_v + d_h$. Plus précisément, les morphismes d_v^{pq} et d_h^{pq} induisent des morphismes $C^{pq} \rightarrow C^{p+1,q} \oplus C^{p,q+1} \rightarrow C_\oplus^{n+1}$ qui induisent à leur tour le morphisme $d_\oplus^n: C_\oplus^n \rightarrow C_\oplus^{n+1}$; la relation $d_\oplus d_\oplus = 0$ découle des relations imposées à d_v et à d_h . Les monomorphismes $H_h^{p0}(C) \rightarrow C^{p0}$ et $H_v^{0q} \rightarrow C^{0q}$ définissent des morphismes de complexes

$$H_h^{0\bullet}(C) \rightarrow C_\oplus^\bullet \leftarrow H_v^{\bullet 0}(C)$$

d'où des morphismes en cohomologie

$$H^\bullet(H_h^{0\bullet}(C)) \xrightarrow{j_h^\bullet} H^\bullet(C_\oplus^\bullet) \xleftarrow{j_v^\bullet} H^\bullet(H_v^{\bullet 0}(C))$$

qui sont évidemment naturels en $C^{\bullet\bullet}$.

Le critère élémentaire que nous allons utiliser à plusieurs reprises est le suivant : si $n \geq 0$, pour que j_h^n (resp. j_v^n) soit un isomorphisme, il suffit que $H^{n-q-1}(H_h^{q\bullet}(C)) = 0$ pour $1 \leq q \leq n-1$ et $H^{n-q}(H_h^{q\bullet}(C)) = 0$ pour $1 \leq q \leq n$ (resp. $H^{n-p-1}(H_v^{\bullet p}(C)) = 0$ pour $1 \leq p \leq n-1$ et $H^{n-p}(H_v^{\bullet p}(C)) = 0$ pour $1 \leq p \leq n$). Une situation fréquente dans laquelle ceci a lieu est lorsque les complexes $C^{p\bullet}$ (resp. $C^{\bullet q}$) sont acycliques. En particulier, j_h^0 et j_v^0 sont des isomorphismes. On peut vérifier ce critère directement par un argument en escalier fastidieux. Donnons-en ici une preuve plus simple avec la théorie des suites spectrales. Les objets $H^p(H_h^{q\bullet}(C))$ constituent en effet la deuxième page $'E_2^{\bullet\bullet}$ de la première suite spectrale associée au double complexe $C^{\bullet\bullet}$, laquelle converge vers $H^\bullet(C_\oplus^\bullet)$, et le morphisme j_h^n n'est autre que le composé des flèches canoniques $'E_2^{n0} \rightarrow 'E_\infty^{n0} \rightarrow H^n(C_\oplus^\bullet)$. La première condition implique que toutes les différentielles passant par $'E_r^{n0}$ sont nulles si $r \geq 2$ et donc que la première flèche est inversible. La deuxième condition signifie que le terme $'E_2^{n-q,q}$, et donc le terme $'E_\infty^{n-q,q}$, est nul si $q \neq 0$; sachant que $(E_\infty^{n-q,q})_{0 \leq q \leq n}$ est l'objet gradué associé à une filtration exhaustive et séparée de $H^n(C_\oplus^\bullet)$, on obtient que la seconde flèche est inversible.

1.10 Soient X un espace annelé, \mathcal{M} un X -module et $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^\bullet$ un complexe augmenté. Lorsque $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^\bullet$ est une résolution, on a défini en 1.2 un morphisme canonique

$$H^\bullet(\mathcal{M}^\bullet(X)) \rightarrow H^\bullet(X, \mathcal{M}),$$

naturel en la résolution donnée. On va expliciter ce morphisme par l'étude d'un double complexe.

On forme un double complexe $\mathcal{D}^{\bullet\bullet} = (\mathcal{D}^p(\mathcal{M}^q))_{p,q \in \mathbf{N}}$ comme suit. Ses différentielles verticales sont celles des complexes $\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{M}^q)$ (1.4), tandis que ses différentielles horizontales s'obtiennent en appliquant les foncteurs \mathcal{D}^p aux différentielles de \mathcal{M}^\bullet avec un facteur $(-1)^p$ près. Cette dernière condition assure la relation $d_v d_h + d_h d_v = 0$ faisant de $\mathcal{D}^{\bullet\bullet}$ un double complexe. Le complexe

$H_v^0(\mathcal{D})$ s'identifie à \mathcal{M}^\bullet en vertu de la functorialité des résolutions flasques de 1.4. Le morphisme induisant j_v^\bullet en cohomologie est donc de la forme $\mathcal{M}^\bullet \rightarrow \mathcal{D}_\oplus^\bullet$. La flèche $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^0$ induit d'autre part une flèche

$$\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{D}_\oplus^\bullet \quad (2)$$

naturelle en $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^\bullet$. Supposons maintenant que $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^\bullet$ soit une résolution de \mathcal{M} . Alors le complexe $H_h^0(\mathcal{D})$ s'identifie à $\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{M})$ par exactitude des foncteurs \mathcal{D}^p (1.3), et la flèche (2) est celle qui induit j_h^\bullet en cohomologie. Chacune des lignes $\mathcal{D}^{p\bullet}$ de ce double complexe est d'ailleurs acyclique dans la catégorie des X -prémodules (1.3), donc si $D^{\bullet\bullet}$ est le double complexe de $\mathcal{O}(X)$ -modules obtenu en appliquant le foncteur $\Gamma(X, ?)$ à $\mathcal{D}^{\bullet\bullet}$, les lignes $D^{p\bullet}$ sont acycliques. Par le critère énoncé en 1.9, la flèche $j_h^\bullet: H^\bullet(H_h^0(D)) \rightarrow H^\bullet(D_\oplus^\bullet)$ est inversible. Or, comme $\Gamma(X, ?)$ est exact à gauche, les complexes $H_h^0(D)$ et $H_v^0(D)$ s'identifient respectivement aux complexes $\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{M})(X)$ et $\mathcal{M}^\bullet(X)$; puisque $\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{M})$ est une résolution $\Gamma(X, ?)$ -acyclique de \mathcal{M} (1.7), on a donc un isomorphisme canonique $H^\bullet(H_h^0(D)) \simeq H^\bullet(X, \mathcal{M})$.

Ainsi, le morphisme $(j_h^\bullet)^{-1}j_v^\bullet$ s'identifie à un morphisme

$$H^\bullet(\mathcal{M}^\bullet(X)) \rightarrow H^\bullet(X, \mathcal{M}).$$

Vérifions que ce morphisme est le même que celui défini directement en 1.2. Soit $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$ une résolution injective de \mathcal{M} . Les colonnes $\mathcal{D}^{q\bullet}$ du complexe $\mathcal{D}^{\bullet\bullet}$ sont acycliques car $\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{M}^q)$ est une résolution de \mathcal{M}^q , donc le monomorphisme $H_v^0(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{D}_\oplus^\bullet$ induit un isomorphisme en cohomologie (1.9). Le complexe $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}_\oplus^\bullet$ obtenu de la résolution $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^\bullet$ en composant avec ce morphisme est donc une résolution de \mathcal{M} , et on en déduit avec les résultats de 1.2 un \mathcal{M} -morphisme $\mathcal{D}_\oplus^\bullet \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$. Toutes les flèches dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{M}) & \rightarrow & \mathcal{D}_\oplus^\bullet & \leftarrow & \mathcal{M}^\bullet \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & \mathcal{I}^\bullet & & \end{array}$$

sont alors des \mathcal{M} -morphisms; par 1.2, les triangles de ce diagramme commutent à homotopie près, d'où le résultat.

1.11 Soient X un espace annelé, \mathcal{M} et \mathcal{N} des X -modules. Nous allons définir un produit cohomologique

$$H^\bullet(X, \mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}(X)} H^\bullet(X, \mathcal{N}) \rightarrow H^\bullet(X, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}), \quad (3)$$

naturel en \mathcal{M} et en \mathcal{N} . Soient $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$ et $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{J}^\bullet$ des résolutions $\Gamma(X, ?)$ -acycliques de \mathcal{M} et de \mathcal{N} , respectivement, induisant des complexes contractiles sur chaque fibre (de telles résolutions existent par 1.4 et 1.7). Sachant que $(\mathcal{I}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{J}^\bullet)_x = \mathcal{I}_x^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{J}_x^\bullet$, on voit aussitôt que le complexe $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{I}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{J}^\bullet$ est aussi contractile sur chaque fibre, donc en particulier est une résolution de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$. On a donc un morphisme canonique

$$H^\bullet((\mathcal{I}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{J}^\bullet)(X)) \rightarrow H^\bullet(X, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}).$$

D'autre part, en se rappelant qu'on a toujours un morphisme canonique naturel $H^\bullet(C^\bullet) \otimes H^\bullet(D^\bullet) \rightarrow H^\bullet(C^\bullet \otimes D^\bullet)$, le morphisme de passage aux faisceaux associés $\mathcal{I}^\bullet(X) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{J}^\bullet(X) \rightarrow (\mathcal{I}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{J}^\bullet)(X)$ induit un morphisme

$$H^\bullet(X, \mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}(X)} H^\bullet(X, \mathcal{N}) \rightarrow H^\bullet((\mathcal{I}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{J}^\bullet)(X)).$$

En composant avec le morphisme ci-dessus, on obtient le morphisme cherché. Les résultats de 1.2 montrent que ce morphisme est indépendant des résolutions choisies \mathcal{I}^\bullet et \mathcal{J}^\bullet (on peut par exemple choisir les résolutions canoniques de 1.4), qu'il est bien naturel en \mathcal{M} et en \mathcal{N} , et qu'il est associatif.

Notons $H(X, \mathcal{M}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^n(X, \mathcal{M})$. Lorsqu'on pose $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{O}_X$ dans (3), on obtient un morphisme de $\mathcal{O}(X)$ -modules

$$H(X, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}(X)} H(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H(X, \mathcal{O}_X)$$

qui étend le produit de l'anneau $H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}(X)$, car l'isomorphisme canonique $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X$ définit la multiplication sur $\mathcal{O}(X)$. Pour la même raison, le produit

$$H(X, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}(X)} H(X, \mathcal{M}) \rightarrow H(X, \mathcal{M})$$

étend la structure de $\mathcal{O}(X)$ -module de $H(X, \mathcal{M})$. On en déduit que $H(X, \mathcal{O}_X)$ est un anneau gradué non nécessairement commutatif (on peut montrer sans difficulté qu'il est anticommutatif relativement à sa graduation, mais nous n'utiliserons pas ce résultat) et que $H(X, \mathcal{M})$ est un $H(X, \mathcal{O}_X)$ -module à gauche gradué.

1.12 Soient X un espace annelé, \mathcal{M} un X -module et \mathcal{L} un X -module inversible. Les morphismes de 1.11 donnent des morphismes

$$H^\bullet(X, \mathcal{L}^{\otimes \bullet}) \otimes_{\mathcal{O}(X)} H^\bullet(X, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes \bullet}) \rightarrow H^\bullet(X, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes \bullet}). \quad (4)$$

Lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$, les propriétés d'associativité et de commutativité des isomorphismes canoniques $\mathcal{L}^{\otimes m} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^{\otimes(m+n)}$ montrent que le morphisme (4) définit sur $H(X, \mathcal{L}^{\otimes \bullet}) = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} H^n(X, \mathcal{L}^{\otimes m})$ une structure d'anneau bigradué, et sur $H(X, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes \bullet})$ une structure de $H(X, \mathcal{L}^{\otimes \bullet})$ -module à gauche bigradué. Sur chaque $H^n(X, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes \bullet})$, on a en particulier une structure de $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes \bullet})$ -module à gauche gradué.

1.13 Soient X un espace annelé, \mathcal{M}, \mathcal{N} et \mathcal{P} des X -modules avec des résolutions $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^\bullet, \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}^\bullet$ et $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^\bullet$. Soient $\mu: \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$ un morphisme de X -modules et $\mu^\bullet: \mathcal{M}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}^\bullet \rightarrow \mathcal{P}^\bullet$ un μ -morphisme. On peut alors former le carré

$$\begin{array}{ccc} H^\bullet(\mathcal{M}^\bullet(X)) \otimes_{\mathcal{O}(X)} H^\bullet(\mathcal{N}^\bullet(X)) & \longrightarrow & H^\bullet(\mathcal{P}^\bullet(X)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^\bullet(X, \mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}(X)} H^\bullet(X, \mathcal{N}) & \longrightarrow & H^\bullet(X, \mathcal{P}) \end{array}$$

dans lequel la flèche supérieure est induite par μ^\bullet , la flèche inférieure est composée de celle de 1.11 et de la flèche induite par μ , et les flèches verticales sont déduites des rappels de 1.2. On va montrer que ce carré est commutatif. On utilise pour cela la description des flèches verticales donnée en 1.10. Notons $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}^\bullet, \mathcal{D}_{\mathcal{N}}^\bullet, \mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\bullet$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}}^\bullet$ les doubles complexes $\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{M}^\bullet), \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{N}^\bullet), \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{P}^\bullet)$ et $\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{M}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}^\bullet)$. On va définir ci-dessous un $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})$ -morphisme

$$\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}) \quad (5)$$

naturel en \mathcal{M} et en \mathcal{N} . Admettant son existence pour l'instant, on dessine le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}^\bullet & \xlongequal{\quad} & \mathcal{M}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{P}^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}_{\mathcal{M}, \oplus}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{\mathcal{N}, \oplus}^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}, \oplus}^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\mathcal{P}, \oplus}^\bullet \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}) & \longrightarrow & \mathcal{D}^\bullet(\mathcal{P}). \end{array}$$

Dans celui-ci, les deux carrés à droite commutent par naturalité des flèches verticales (1.10). Montrons que les carrés à gauche sont également commutatifs. Si l'on se réfère à la définition des flèches verticales (1.10), il suffit de vérifier la commutativité des carrés

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{M}^p \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}^q & \xlongequal{\quad} & \mathcal{M}^p \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}^q & & \mathcal{D}^p(\mathcal{M}^0) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^q(\mathcal{N}^0) & \longrightarrow & \mathcal{D}^{p+q}(\mathcal{M}^0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}^0) \\ \downarrow & & \downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{D}^0(\mathcal{M}^p) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^0(\mathcal{N}^q) & \longrightarrow & \mathcal{D}^0(\mathcal{M}^p \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}^q) & & \mathcal{D}^p(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^q(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \mathcal{D}^{p+q}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}); \end{array}$$

celle du premier résulte de ce que (5) est un $(\mathcal{M} \otimes_{\ell_X} \mathcal{N})$ -morphisme, tandis que celle du second provient de la naturalité de (5). Or, le carré dont on cherche à prouver la commutativité est par définition le contour du diagramme obtenu de celui qui précède en appliquant le foncteur $\Gamma(X, ?)$, en prenant la cohomologie et en précomposant les trois flèches horizontales par les flèches binaturelles $H^*(\Gamma(X, ?)) \otimes_{\ell(X)} H^*(\Gamma(X, ?)) \rightarrow H^*(\Gamma(X, ? \otimes_{\ell_X} ?))$ (les flèches ascendantes devenant inversibles des deux côtés); il est donc commutatif comme annoncé.

Il reste donc à construire le morphisme (5). Pour cela, on définit dans un premier temps un morphisme de complexes binaturel

$$\zeta^* : \mathcal{D}^*(\mathcal{M}) \times \mathcal{D}^*(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{D}^*(\mathcal{M} \otimes_{\ell_X} \mathcal{N}), \quad (6)$$

où $\mathcal{D}^*(\mathcal{M}) \times \mathcal{D}^*(\mathcal{N})$ est le complexe $(\mathcal{D}^n(\mathcal{M}) \otimes_{\ell_X} \mathcal{D}^n(\mathcal{N}))_{n \in \mathbf{N}}$ avec les opérateurs cosimpliciaux évidents. En degré 0, ζ^0 est associé au morphisme de préfaisceaux qui sur un ouvert U est le morphisme $(\prod_{x \in U} \mathcal{M}_x) \otimes_{\ell_X(U)} (\prod_{x \in U} \mathcal{N}_x) \rightarrow \prod_{x \in U} (\mathcal{M}_x \otimes_{\ell_{X,x}} \mathcal{N}_x)$ induit par les projections $(\prod_{x \in U} \mathcal{M}_x) \otimes_{\ell_X(U)} (\prod_{x \in U} \mathcal{N}_x) \rightarrow \mathcal{M}_y \otimes_{\ell_{X,y}} \mathcal{N}_y$. En d'autres termes, si $(s_x)_{x \in U}$ et $(t_x)_{x \in U}$ sont respectivement des sections de $\mathcal{D}^0(\mathcal{M})$ et de $\mathcal{D}^0(\mathcal{N})$ au-dessus de U , alors $\zeta_U^0((s_x)_{x \in U} \otimes (t_x)_{x \in U}) = (s_x \otimes t_x)_{x \in U}$. La naturalité est claire. Pour $n \geq 1$, on pose

$$\zeta_{\mathcal{M}, \mathcal{N}}^n = \mathcal{D}^0(\zeta_{\mathcal{M}, \mathcal{N}}^{n-1}) \zeta_{\mathcal{D}^{n-1}(\mathcal{M}), \mathcal{D}^{n-1}(\mathcal{N})}^0.$$

Montrons que ce morphisme commute aux différentielles, et même aux opérateurs cosimpliciaux de \mathcal{D}^* et $\mathcal{D}^* \times \mathcal{D}^*$. On le vérifie par un calcul explicite. Fixons un ouvert U de X . Un élément $\alpha \in \mathcal{D}^0(\mathcal{M})(U)$ est une application qui à $x \in U$ associe un élément de la fibre \mathcal{M}_x ; on notera $\alpha(x)$ une section de \mathcal{M} dont le germe en x est cet élément. Si $\alpha \in \mathcal{D}^n(\mathcal{M})$, on notera $\alpha(x_0, \dots, x_n)$ pour $\alpha(x_0) \dots (x_n)$; c'est donc une section de \mathcal{M} dont le germe en x_n est la valeur en x_n de l'application $\alpha(x_0, \dots, x_{n-1})$, qui est une section de $\mathcal{D}^0(\mathcal{M})$ au-dessus d'un voisinage de x_{n-1} auquel x_n appartient. Avec ces notations, le morphisme ζ_U^0 s'exprime comme suit : si $\alpha \in \mathcal{D}^0(\mathcal{M})(U)$ et $\beta \in \mathcal{D}^0(\mathcal{N})(U)$, alors ζ_U^0 envoie $\alpha \otimes \beta$ sur la section γ dont la valeur en $x \in U$ est représentée par la section $\alpha(x) \otimes \beta(x)$ de $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, ce qu'on écrira $\gamma(x) = \alpha(x) \otimes \beta(x)$ (étant entendu que les sections $\alpha(x)$, $\beta(x)$ et $\gamma(x)$ sont choisies au-dessus d'un voisinage commun de x). Considérons maintenant un morphisme de X -modules quelconque $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$; si $\beta = \mathcal{D}^0(\mu)_U(\alpha)$, alors $\beta(x) = \mu_V(\alpha(x))$, V étant le voisinage de x sur lequel $\alpha(x)$ est défini. On déduit alors de la définition récursive de ζ^* que si $\alpha \otimes \beta$ est une section de $\mathcal{D}^n(\mathcal{M}) \otimes_{\ell_X} \mathcal{D}^n(\mathcal{N})$ au-dessus de U et si $\gamma = \zeta_U^n(\alpha \otimes \beta)$, alors $\gamma(x_0, \dots, x_n) = \alpha(x_0, \dots, x_n) \otimes \beta(x_0, \dots, x_n)$. Explicitons maintenant les opérations cosimpliciales de $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}^*(\mathcal{M})$, à commencer par l'unité $\eta_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}^0(\mathcal{M})$ et le produit $\mu_{\mathcal{M}} : \mathcal{D}^1(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{D}^0(\mathcal{M})$. Si α est une section de \mathcal{M} au-dessus de U , la valeur de $\beta = \eta_{\mathcal{M}, U}(\alpha)$ en $x \in U$ est par définition le germe de α en x , donc $\beta(x) = \alpha$. Si α est une section de $\mathcal{D}^1(\mathcal{M})$ au-dessus de U , alors la valeur de $\beta = \mu_{\mathcal{M}, U}(\alpha)$ en x est la valeur en x d'une section $\alpha(x)$ représentant la valeur de α en x ; autrement dit, $\beta(x) = \alpha(x, x)$. On peut maintenant facilement expliciter les morphismes $\delta^i = \mathcal{D}^{i-1}(\eta_{\mathcal{D}^{n-i-1}(\mathcal{M})}) : \mathcal{D}^{n-1}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{D}^n(\mathcal{M})$ et $\sigma^i = \mathcal{D}^{i-1}(\mu_{\mathcal{D}^{n-i-1}(\mathcal{M})}) : \mathcal{D}^{n+1}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{D}^n(\mathcal{M})$. Si $\alpha \in \mathcal{D}^{n-1}(\mathcal{M})(U)$, alors

$$\delta_U^i(\alpha)(x_0, \dots, x_n) = \alpha(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

et si $\alpha \in \mathcal{D}^{n+1}(\mathcal{M})(U)$,

$$\sigma_U^i(\alpha)(x_0, \dots, x_n) = \alpha(x_0, \dots, x_i, x_i, \dots, x_n).$$

Finalement, si $\alpha \otimes \beta \in (\mathcal{D}^{n-1}(\mathcal{M}) \otimes_{\ell_X} \mathcal{D}^{n-1}(\mathcal{N}))(U)$, $\gamma_1 = \zeta_U^n(\delta^i \otimes \delta^i)(\alpha \otimes \beta)$ et $\gamma_2 = \delta_U^i \zeta_U^{n-1}(\alpha \otimes \beta)$, il vient

$$\gamma_1(x_0, \dots, x_n) = \alpha(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \otimes \beta(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \gamma_2(x_0, \dots, x_n);$$

pour $n = 0$, ceci montre que ζ^* est un $(\mathcal{M} \otimes_{\ell_X} \mathcal{N})$ -morphisme. Un calcul semblable montre que ζ^* commute avec les opérateurs de codégénérescence.

Sachant qu'on a toujours un $(\mathcal{M} \otimes_{\ell_X} \mathcal{N})$ -morphisme binaturel

$$\mathcal{D}^*(\mathcal{M}) \otimes_{\ell_X} \mathcal{D}^*(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{D}^*(\mathcal{M}) \times \mathcal{D}^*(\mathcal{N})$$

par la théorie des complexes cosimpliciaux (théorème d'Eilenberg-Zilber), la démonstration est complète.

§2 Cohomologie de Čech

2.1 Soit X un espace topologique. On appelle *recouvrement ouvert* de X une famille $(U_i)_{i \in I}$ de parties ouvertes de X telle que I soit non vide et $\bigcup_{i \in I} U_i = X$. Si $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ et $\mathfrak{V} = (V_j)_{j \in J}$ sont des recouvrements ouverts de X , un *raffinement* de \mathfrak{U} vers \mathfrak{V} est une application $\lambda: J \rightarrow I$ telle que $V_j \subset U_{\lambda(j)}$ pour tout $j \in J$. Il est clair que la composition de deux raffinements est encore un raffinement. On définit ainsi une catégorie Cov_X ayant pour objets les recouvrements ouverts de X et pour morphismes d'un recouvrement \mathfrak{U} vers un recouvrement \mathfrak{V} les raffinements de \mathfrak{U} vers \mathfrak{V} . Dire que \mathfrak{V} est *plus fin* que \mathfrak{U} revient à dire qu'il existe une flèche $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}$ dans Cov_X .

Le foncteur $\text{Cov}_X^\circ \rightarrow \text{Ens}$, $(U_i)_{i \in I} \mapsto I$, relève les sommes non vides. En effet, si $(\mathfrak{U}^\alpha)_\alpha$ est une famille non vide de recouvrements ouverts de X , $\mathfrak{U}^\alpha = (U_i^\alpha)_{i \in I_\alpha}$, le recouvrement $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in \coprod_\alpha I_\alpha}$ défini par $U_i = U_i^\alpha$ si $i \in I_\alpha$, avec les raffinements évidents $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}^\alpha$, vérifie la propriété universelle recherchée.

Soit F la sous-catégorie pleine de Cov_X formée des recouvrements ouverts indexés par des ensembles de la forme $X \times \{1, \dots, n\}$ pour $n \geq 1$. Si \mathfrak{U} est un recouvrement ouvert quelconque de X , il existe bien sûr un objet de F qui est plus fin que \mathfrak{U} . D'autre part, puisque $X \times \{1, \dots, m+n\}$ est somme des ensembles $X \times \{1, \dots, m\}$ et $X \times \{1, \dots, n\}$, le produit dans Cov_X de deux objets de F peut être pris dans $\text{Ob } F$. On en déduit que pour tout recouvrement ouvert \mathfrak{U} de X la catégorie $(\mathfrak{U} \downarrow F)$ est non vide et connexe, c'est-à-dire que F est une sous-catégorie finale de Cov_X . Par conséquent, pour qu'un foncteur $\text{Cov}_X \rightarrow C$ possède une limite inductive, il faut et il suffit que sa restriction à F en ait une, et ces limites s'identifient.

2.2 Soient X un espace topologique et $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . Pour $n \geq 0$, on appelle *n -simplexe* de \mathfrak{U} toute suite $i_0 \dots i_n$ de $n+1$ éléments de I . Un tel simplexe est *dégénéré* si le même élément de I y apparaît à plus d'une reprise. Si $\sigma = i_0 \dots i_n$ est un n -simplexe de \mathfrak{U} , on appelle n le *degré* de σ et on écrit $|\sigma| = n$; on note \mathfrak{U}_σ l'ouvert $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}$ de X . Si $\lambda: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}$ est un raffinement et si $\tau = j_0 \dots j_n$ est un n -simplexe de \mathfrak{V} , on note $\lambda\tau$ le n -simplexe $\lambda(j_0) \dots \lambda(j_n)$ de \mathfrak{U} ; on a donc $\mathfrak{V}_\tau \subset \mathfrak{U}_{\lambda\tau}$.

Supposons désormais que X soit un espace annelé. Si $n \geq 0$, on note $\mathcal{K}_n(\mathfrak{U})$ le X -prémódule libre engendré par les n -simplexes de \mathfrak{U} . Un morphisme de X -prémódules $\mu: \mathcal{K}_n(\mathfrak{U}) \rightarrow \mathcal{M}$ est donc entièrement déterminé par le choix de sections globales $\mu(\sigma)$ de \mathcal{M} pour tout n -simplexe σ . Le X -prémódule $\mathcal{K}_n(\mathfrak{U})$ varie fonctoriellement avec \mathfrak{U} dans Cov_X° : si $\lambda: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}$ est un raffinement, le morphisme $\mathcal{K}_n(\lambda): \mathcal{K}_n(\mathfrak{V}) \rightarrow \mathcal{K}_n(\mathfrak{U})$ est défini par $\tau \mapsto \lambda\tau$. Étant donné une application $f: \{0, \dots, m\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$, on peut définir un morphisme $\mathcal{K}_n(\mathfrak{U}) \rightarrow \mathcal{K}_m(\mathfrak{U})$ par la formule $i_0 \dots i_n \mapsto i_{f(0)} \dots i_{f(m)}$. Il est clair, d'une part, que ce morphisme est naturel en \mathfrak{U} et, d'autre part, que cette construction définit sur le foncteur \mathcal{K} une structure simpliciale. Ce complexe simplicial possède une augmentation naturelle $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{O}_X$ qui envoie tous les 0-simplexes sur le « (-1) -simplexe » 1. On notera aussi \mathcal{K}_{-1} le foncteur constant en \mathcal{O}_X . La différentielle du complexe de chaînes associé à \mathcal{K} sera notée d_\cdot . Le complexe augmenté $\mathcal{K}(\mathfrak{U}) \rightarrow \mathcal{O}_X$ est contractile de manière non naturelle: si l'on choisit un 0-simplexe i de \mathfrak{U} , le morphisme de degré $+1$ défini par $i_0 \dots i_n \mapsto ii_0 \dots i_n$ est une homotopie contractante.

On dira qu'un morphisme $\xi: \mathcal{K}_n(\mathfrak{V}) \rightarrow \mathcal{K}_m(\mathfrak{U})$ est *transposable* si $U \cap \mathfrak{V}_\tau \subset U \cap \mathfrak{U}_\sigma$ pour tout m -simplexe σ , tout n -simplexe τ et tout ouvert U de X vérifiant $\xi_{U \cap \mathfrak{V}_\tau}(\tau)_\sigma \neq 0$ (cette définition a un sens pour tous $m \geq -1$ et $n \geq -1$, étant entendu que $\mathfrak{U}_\sigma = X$ si σ est le (-1) -simplexe). Une transformation naturelle $\xi: \mathcal{K}_n \rightarrow \mathcal{K}_m$ est dite transposable si toutes ses composantes le sont. Par exemple, les morphismes de la forme $\mathcal{K}_\cdot(\lambda)$ sont transposables, et la transformation naturelle $\mathcal{K}_n \rightarrow \mathcal{K}_m$ induite par une application $f: \{0, \dots, m\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$ est transposable; en particulier, toutes les opérations simpliciales de \mathcal{K} sont transposables. Par contre, l'homotopie contractante exhibée ci-dessus n'est transposable que si $\mathfrak{U}_i = X$. Notons aussi que compositions et combinaisons $\mathcal{O}(X)$ -linéaires de morphismes transposables sont transposables.

2.3 Soit X un espace annelé. Nous allons définir un bifoncteur \mathcal{C}^\cdot de la catégorie $\text{Cov}_X \times \text{Mod}_X^-$ à valeurs dans la catégorie des objets cosimpliciaux dans Mod_X^- , exact dans sa deuxième variable. Soient \mathfrak{U} un recouvrement ouvert de X et \mathcal{M} un X -prémódule. Pour $n \geq 0$, on pose

$$\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) = \prod_{|\sigma|=n} (i_\sigma)_*(\mathcal{M} | \mathfrak{U}_\sigma), \quad (1)$$

où $i_\sigma: \mathfrak{U}_\sigma \rightarrow X$ est le morphisme d'inclusion. Ici $\mathcal{M}|_{\mathfrak{U}_\sigma}$ représente le \mathfrak{U}_σ -prémodule défini par $U \mapsto \mathcal{M}(U)$; il s'identifie donc au \mathfrak{U}_σ -module $(i_\sigma)^*(\mathcal{M})$ lorsque \mathcal{M} est un X -module. Sachant que le foncteur oubli $\mathbf{Mod}_X \rightarrow \mathbf{Mod}_{\bar{X}}$ commute aux limites projectives, $\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ est un X -module si \mathcal{M} en est un. Si U est un ouvert de X , un élément α de $\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{M})(U)$ est défini par la donnée d'un élément $\alpha_\sigma \in \mathcal{M}(U \cap \mathfrak{U}_\sigma)$ pour chaque n -simplexe σ de \mathfrak{U} .

La functorialité de \mathcal{C}^n en sa deuxième variable est donnée par la formule ci-dessus, et l'exactitude du foncteur $\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, ?)$ est apparente. On définit aussi le foncteur $\mathcal{C}^{-1}(\mathfrak{U}, ?)$ comme étant le foncteur identité $\mathbf{Mod}_{\bar{X}} \rightarrow \mathbf{Mod}_{\bar{X}}$.

2.4 Soit X un espace annelé. On complète maintenant la définition du bifoncteur \mathcal{C}^* . Soient \mathfrak{U} et \mathfrak{V} des recouvrements ouverts de X et $\xi: \mathcal{K}_n(\mathfrak{V}) \rightarrow \mathcal{K}_m(\mathfrak{U})$ un morphisme de X -prémodules transposable (2.2). On peut lui associer un morphisme ${}^t\xi: \mathcal{C}^m(\mathfrak{U}, ?) \rightarrow \mathcal{C}^n(\mathfrak{V}, ?)$, appelé le *transposé* de ξ , par la formule

$$(({}^t\xi)_{\mathcal{M}, U}\alpha)_\tau = \sum_{|\sigma|=m} \xi_{U \cap \mathfrak{V}_\tau}(\tau)_\sigma(\alpha_\sigma|_{U \cap \mathfrak{U}_\tau})$$

pour $\alpha \in \mathcal{C}^m(\mathfrak{U}, \mathcal{M})(U)$, les termes de la somme ayant un sens chaque fois que $\xi_{U \cap \mathfrak{U}_\tau}(\tau)_\sigma \neq 0$. Le fait que ${}^t\xi$ est naturel en \mathcal{M} est évident. On vérifie immédiatement que ${}^t?: (m, \mathfrak{U}) \mapsto \mathcal{C}^m(\mathfrak{U}, ?)$, $m \geq -1$, est alors un foncteur $\mathcal{O}(X)$ -linéaire si l'on prend pour morphismes de (m, \mathfrak{U}) vers (n, \mathfrak{V}) les morphismes transposables $\mathcal{K}_n(\mathfrak{V}) \rightarrow \mathcal{K}_m(\mathfrak{U})$. Si $\lambda: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}$ est un raffinement et si l'on pose $\mathcal{C}^n(\lambda, ?) = {}^t\mathcal{K}_n(\lambda)$, on obtient donc que \mathcal{C}^n est un bifoncteur et que le transposé d'une transformation naturelle $\mathcal{K}_n \rightarrow \mathcal{K}_m$ est une transformation naturelle $\mathcal{C}^m \rightarrow \mathcal{C}^n$. En transposant les opérations simpliciales de \mathcal{K}_* , on obtient par suite une structure cosimpliciale sur \mathcal{C}^* , comme annoncé, et en transposant l'augmentation $\mathcal{K}_0 \rightarrow \mathcal{K}_{-1}$ on obtient une augmentation $\mathcal{C}^{-1} \rightarrow \mathcal{C}^0$. La différentielle d^* du complexe $\mathcal{C}^*(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ est donc donnée, pour $\alpha \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{M})(U)$, par la formule

$$(d_U^{n-1}\alpha)_{i_0 \dots i_n} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_n}|_{U \cap \mathfrak{U}_{i_0 \dots i_n}},$$

où tout indice chapeauté doit être omis.

Comme le foncteur ${}^t?$ est $\mathcal{O}(X)$ -linéaire, le transposé d'une homotopie entre morphismes transposables est une homotopie entre les morphismes transposés. Par exemple, s'il existe un 0-simplexe i tel que $\mathfrak{U}_i = X$, alors on déduit de 2.2 que le complexe augmenté $\mathcal{C}^{-1}(\mathfrak{U}, ?) \rightarrow \mathcal{C}^*(\mathfrak{U}, ?)$ est contractile. En général, ce complexe est contractile sur chaque fibre, car pour tout point x de X il existe un 0-simplexe i tel que $x \in \mathfrak{U}_i$, et on a évidemment $\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, ?)|_{\mathfrak{U}_i} = \mathcal{C}^n(\mathfrak{U}|_{\mathfrak{U}_i}, ?)|_{\mathfrak{U}_i}$. En particulier, si \mathcal{M} est un X -module, le complexe augmenté $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}^*(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ est une résolution de \mathcal{M} dans \mathbf{Mod}_X qui est functorielle en \mathcal{M} .

2.5 Proposition. Soient X un espace annelé et \mathfrak{U} et \mathfrak{V} deux recouvrements ouverts de X . Pour tous raffinement $\lambda, \mu: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}$, il existe une homotopie de cochaînes $\mathcal{C}^*(\lambda, ?) \rightarrow \mathcal{C}^*(\mu, ?)$.

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il existe une homotopie de $\mathcal{K}_*(\lambda)$ vers $\mathcal{K}_*(\mu)$ qui est transposable. Soit $n \geq 0$. On définit $\Sigma_n: \mathcal{K}_n(\mathfrak{V}) \rightarrow \mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{U})$ par la formule

$$\Sigma_n(j_0 \dots j_n) = \sum_{k=0}^n \mu(j_0) \dots \mu(j_k) \lambda(j_k) \dots \lambda(j_n).$$

C'est bien un morphisme transposable car $\mathfrak{V}_{j_0 \dots j_n} \subset \mathfrak{U}_{\lambda(j_0) \dots \lambda(j_k) \mu(j_k) \dots \mu(j_n)}$ pour tout k . Soit $\tau = j_0 \dots j_n$ un n -simplexe de \mathfrak{V} . Dans ce qui suit on notera pour simplifier $\mu_k = \mu(j_k)$ et $\lambda_k = \lambda(j_k)$. En développant les définitions on obtient les relations

$$\begin{aligned} d_{n+1}\Sigma_n(\tau) &= \sum_{l \leq k} (-1)^{k+l} \mu_0 \dots \hat{\mu}_l \dots \mu_k \lambda_k \dots \lambda_n + \sum_{k \leq l} (-1)^{k+l+1} \mu_0 \dots \mu_k \lambda_k \dots \hat{\lambda}_l \dots \lambda_n \text{ et} \\ \Sigma_{n-1}d_n(\tau) &= \sum_{l < k} (-1)^{k+l+1} \mu_0 \dots \hat{\mu}_l \dots \mu_k \lambda_k \dots \lambda_n + \sum_{k < l} (-1)^{k+l} \mu_0 \dots \mu_k \lambda_k \dots \hat{\lambda}_l \dots \lambda_n, \end{aligned}$$

où les indices de sommation prennent toutes les valeurs possibles entre 0 et n et où $\Sigma_{-1} = 0$. Lorsque l'on somme ces deux expressions, il vient

$$(d_{n+1}\Sigma_n + \Sigma_{n-1}d_n)(\tau) = \sum_{k=0}^n \mu_0 \cdots \mu_{k-1} \lambda_k \cdots \lambda_n - \sum_{k=0}^n \mu_0 \cdots \mu_k \lambda_{k+1} \cdots \lambda_n.$$

Après simplification, on obtient $(d_{n+1}\Sigma_n + \Sigma_{n-1}d_n)(\tau) = \lambda\tau - \mu\tau$. \square

2.6 Soit X un espace annelé. En composant le bifoncteur \mathcal{C}^* avec le foncteur $\Gamma^-(X, ?)$, on obtient un bifoncteur à valeurs dans la catégorie des $\mathcal{O}(X)$ -modules cosimpliciaux, noté C^* . Si \mathfrak{U} est un recouvrement ouvert de X et \mathcal{M} est un X -module, on appelle *cohomologie de \mathfrak{U} à coefficients dans \mathcal{M}* la cohomologie du complexe $C^*(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$, notée $H^*(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$. Explicite-ment, on a donc

$$C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) = \prod_{|\sigma|=n} \mathcal{M}(\mathfrak{U}_\sigma)$$

où $\mathcal{M}(\mathfrak{U}_\sigma)$ est un $\mathcal{O}(X)$ -module grâce à la restriction des scalaires $\mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(\mathfrak{U}_\sigma)$. Le foncteur $C^n(\mathfrak{U}, ?) : \text{Mod}_X^- \rightarrow \text{Mod}_{\mathcal{O}(X)}$ est exact car $\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, ?)$ l'est et $\Gamma^-(X, ?)$ commute à toutes les limites.

2.7 Lemme. [1] Soient X un espace annelé et \mathfrak{U} et \mathfrak{V} des recouvrements ouverts de X . Soient ζ et ξ des morphismes de complexes de chaînes $\mathcal{K}(\mathfrak{V}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathfrak{U})$ (resp. des transformations naturelles $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$) tels que $\zeta_0 = \xi_0$. Alors ζ et ξ sont homotopes. Si ζ et ξ sont transposables, il existe une homotopie transposable de ζ vers ξ , pour autant que \mathfrak{V} soit plus fin que \mathfrak{U} .

Démonstration. On construit un morphisme de X -prémodules $\Sigma_n : \mathcal{K}_n(\mathfrak{V}) \rightarrow \mathcal{K}_{n+1}(\mathfrak{U})$ par récurrence sur $n \geq 0$. Choisissons pour tout simplexe τ de \mathfrak{V} un 0-simplexe τ' de \mathfrak{U} . On pose pour commencer $\Sigma_0 = 0$, et pour $n \geq 1$ on pose $\Sigma_n(\tau) = h_n^{\tau'}(\zeta_n - \xi_n - \Sigma_{n-1}d_n)(\tau)$ pour tout n -simplexe τ de \mathfrak{V} , où $h_n^{\tau'}$ est l'homotopie contractante de $\mathcal{K}(\mathfrak{U}) \rightarrow \mathcal{O}_X$ définie par $i_0 \dots i_n \mapsto \tau' i_0 \dots i_n$ (2.2). Si \mathfrak{V} est plus fin que \mathfrak{U} , on peut choisir τ' tel que $\mathfrak{V}_\tau \subset \mathfrak{U}_{\tau'}$, et on vérifie immédiatement par récurrence que Σ_n est transposable si on suppose ζ et ξ transposables. Si $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}$ et ζ et ξ sont des transformations naturelles (transposables), on peut garantir la naturalité (et la transposabilité) de Σ_n en choisissant par exemple τ' égal au premier 0-simplexe de τ . Il reste à vérifier les relations $d_{n+1}\Sigma_n + \Sigma_{n-1}d_n = \zeta_n - \xi_n$, ce qu'on fait par récurrence sur $n \geq 0$ (on pose bien sûr $\Sigma_{-1} = 0$). Pour $n = 0$, cela résulte de ce que $\zeta_0 = \xi_0$. Pour $n \geq 1$, comme $h_n^{\tau'}$ est une homotopie contractante, on a

$$(d_{n+1}\Sigma_n + \Sigma_{n-1}d_n)(\tau) = \zeta_n(\tau) - \xi_n(\tau) - h_n^{\tau'}d_n(\zeta_n(\tau) - \xi_n(\tau) - \Sigma_{n-1}d_n(\tau)),$$

et le dernier terme est nul par l'hypothèse de récurrence appliquée à $d_n(\tau)$. \square

2.8 Soient X un espace annelé et \mathfrak{U} un recouvrement ouvert de X . Si $i_0 \dots i_n$ est un n -simplexe de \mathfrak{U} et π est une permutation de $\{0, \dots, n\}$, on note $\pi(i_0 \dots i_n)$ le n -simplexe $i_{\pi(0)} \dots i_{\pi(n)}$. On note $\mathcal{C}'^*(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ le sous-complexe des cochaînes alternées de $\mathcal{C}^*(\mathfrak{U}, ?)$: si \mathcal{M} est un X -prémodule et $U \subset X$ est un ouvert, $\mathcal{C}'^n(\mathfrak{U}, \mathcal{M})(U)$ est constitué des $\alpha \in \mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{M})(U)$ vérifiant, d'une part, $\alpha_\sigma = 0$ lorsque σ est un n -simplexe dégénéré et, d'autre part, $\alpha_{\pi\sigma} = (-1)^\pi \alpha_\sigma$ pour toute permutation π de $\{0, \dots, n\}$. On vérifie facilement que $\mathcal{C}'^*(\mathfrak{U}, ?)$ est un sous-foncteur de $\mathcal{C}^*(\mathfrak{U}, ?)$. On note $C'^*(\mathfrak{U}, ?)$ le foncteur obtenu en composant $\mathcal{C}'^*(\mathfrak{U}, ?)$ avec $\Gamma^-(X, ?)$.

Si on munit de plus pour toutes d'un ordre total l'ensemble des 0-simplexes de \mathfrak{U} , le foncteur $\mathcal{C}'^*(\mathfrak{U}, ?)$ est évidemment isomorphe au sous-foncteur de $\mathcal{C}^*(\mathfrak{U}, ?)$ défini en restreignant le produit (1) aux simplexes *strictement croissants*, c'est-à-dire aux simplexes $i_0 \dots i_n$ tels que $i_0 < \dots < i_n$. On peut définir une projection $p^* : \mathcal{C}^*(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{C}'^*(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$, naturelle en \mathcal{M} , de la manière suivante. Si σ est un n -simplexe non dégénéré, on note π_σ la permutation de $\{0, \dots, n\}$ telle que $\pi_\sigma \sigma$ soit strictement croissant. Alors pour $\alpha \in \mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{M})(U)$, on pose $(p_U^n \alpha)_\sigma = 0$ si σ est dégénéré et $(p_U^n \alpha)_\sigma = (-1)^{\pi_\sigma} \alpha_{\pi_\sigma \sigma}$ dans le cas contraire.

Proposition. Soient X un espace annelé et \mathfrak{U} un recouvrement ouvert de X dont l'ensemble des 0-simplexes est muni d'un ordre total. Le morphisme d'inclusion $i^* : \mathcal{C}'^*(\mathfrak{U}, ?) \rightarrow \mathcal{C}^*(\mathfrak{U}, ?)$ et la projection canonique $p^* : \mathcal{C}^*(\mathfrak{U}, ?) \rightarrow \mathcal{C}'^*(\mathfrak{U}, ?)$ sont alors des équivalences d'homotopie quasi-inverses.

Démonstration. On a évidemment $p^*i^* = \text{id}$, donc il s'agit de montrer que i^*p^* est homotope à l'identité. On remarque que i^*p^* est le transposé d'un morphisme $\xi_* : \mathcal{K}(\mathfrak{U}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathfrak{U})$, à savoir le morphisme tel que $\xi_n(\sigma) = 0$ si σ est dégénéré et $\xi_n(\sigma) = (-1)^{\pi_\sigma} \pi_\sigma \sigma$ dans le cas contraire. Comme $\xi_0 = \text{id}$, on peut appliquer le lemme 2.7 qui nous donne le résultat. \square

En particulier, les foncteurs $H^*(\mathfrak{U}, ?)$ et $H^*(C'^*(\mathfrak{U}, ?))$ sont isomorphes.

2.9 Proposition. Soient X un espace annelé, \mathfrak{U} un recouvrement ouvert de X et \mathcal{M} un X -module. Si \mathcal{M} est flasque, alors $C^*(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ est acyclique.

Démonstration. Chaque X -module $\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ est flasque, car restriction à un ouvert, images directes et produits de X -modules flasques sont évidemment flasques. Le complexe augmenté $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}^*(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ est donc une résolution flasque de \mathcal{M} (2.4). Par la proposition 1.7, on a un isomorphisme $H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) \cong H^n(X, \mathcal{M})$. On conclut avec la proposition 1.7. \square

2.10 Soient X un espace annelé et \mathcal{M} un X -prémodule. On note $\check{H}^*(X, ?)$ le foncteur obtenu en prenant la limite inductive du bifoncteur $(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) \mapsto H^*(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ en sa première variable :

$$\check{H}^*(X, \mathcal{M}) = \varinjlim H^*(?, \mathcal{M}).$$

Ces limites inductives existent car la catégorie Cov_X admet une sous-catégorie finale qui est petite (2.1). Le $\mathcal{O}(X)$ -module gradué $\check{H}^*(X, \mathcal{M})$ s'appelle la *cohomologie de Čech de X à coefficients dans \mathcal{M}* .

Dans certaines applications, on a besoin de savoir que la cohomologie de Čech est la cohomologie d'un complexe de cochaînes. Rappelons que pour que la limite inductive de diagrammes $d: \mathbb{I} \rightarrow \text{Mod}_{\mathcal{O}(X)}$ soit un foncteur exact, il suffit que \mathbb{I} soit une catégorie filtrante. Il n'existe pas, en général, de sous-catégorie de Cov_X qui soit à la fois finale et filtrante ; c'est pourquoi on introduit la catégorie R_X comme suit. Les objets de R_X sont les recouvrements ouverts de X de la forme $(U_x)_{x \in X}$ tels que $x \in U_x$ pour tout $x \in X$, et les flèches de R_X sont les raffinements dont l'application sous-jacente est l'identité sur X . Il est clair que R_X est un préordre filtrant. Si on pose

$$\check{C}^*(X, \mathcal{M}) = \varinjlim C^*(?, \mathcal{M})|_{\text{R}_X}$$

alors on obtient, d'une part, que le foncteur $\check{C}^*(X, ?)$ est exact car les $C^*(\mathfrak{U}, ?)$ le sont et, d'autre part, que $H^*(\check{C}^*(X, \mathcal{M})) = \varinjlim H^*(?, \mathcal{M})|_{\text{R}_X}$.

Soit P le préordre des recouvrements ouverts de X : c'est le quotient de Cov_X obtenu en identifiant toutes les flèches parallèles. En vertu de la proposition 2.5, le bifoncteur $(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) \mapsto H^*(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ se factorise à travers $\text{P} \times \text{Mod}_X$. Cela implique que $\check{H}^*(X, \mathcal{M})$ est aussi limite inductive de la restriction du foncteur $H^*(?, \mathcal{M})$ à toute sous-catégorie de Cov_X formée de recouvrements suffisamment fins, car une telle sous-catégorie devient finale dans P . En particulier, on a $\check{H}^*(X, ?) = H^*(\check{C}^*(X, ?))$.

2.11 Soient X un espace annelé, \mathfrak{U} un recouvrement ouvert de X et \mathcal{M} un X -module. Soit $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}^*$ une résolution injective de \mathcal{M} . Rappelons que $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}^*(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ est une résolution de \mathcal{M} (2.4). Par les résultats rappelés en 1.2, il existe un morphisme $\mathcal{C}^*(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{I}^*$, unique à homotopie près, faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{C}^*(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) \\ \parallel & & \vdots \\ \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{I}^*, \end{array}$$

d'où un morphisme de $\mathcal{O}(X)$ -modules uniquement déterminé

$$\omega_{\mathfrak{U}, \mathcal{M}}^* : H^*(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) \rightarrow H^*(X, \mathcal{M})$$

qui est naturel en \mathfrak{U} et en \mathcal{M} car \mathcal{C}^* est un bifoncteur. On a déjà donné une description explicite de $\omega_{\mathfrak{U}, \mathcal{M}}^*$ en 1.10.

2.12 Soient X un espace annelé, \mathfrak{U} un recouvrement ouvert de X et \mathcal{M} un X -module. Soit $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$ une résolution injective de \mathcal{M} . On va définir sur $\mathcal{C}^{\bullet\bullet} = (\mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{I}^q))_{p,q \in \mathbf{N}}$ une structure de double complexe dans Mod_X . La différentielle verticale d_v^{pq} de ce complexe est la différentielle du complexe $\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{I}^q)$ en degré p , et la différentielle horizontale d_h^{pq} est obtenue en appliquant le foncteur $\mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, ?)$ à la différentielle de \mathcal{I}^\bullet en degré q avec un facteur $(-1)^p$ près. Cette dernière condition nous donne, en plus des relations évidentes $d_v d_v = 0$ et $d_h d_h = 0$, la relation $d_v d_h + d_h d_v = 0$ faisant de $\mathcal{C}^{\bullet\bullet}$ un double complexe. Soit $C^{\bullet\bullet}$ le double complexe obtenu après application du foncteur $\Gamma(X, ?)$. Puisque les \mathcal{I}^q sont flasques (1.5), les complexes $C^{\bullet q}$ sont acycliques par la proposition 2.9. Par le critère énoncé en 1.9, le morphisme canonique $j_v^\bullet : H^\bullet(H_v^{0\bullet}(C)) \rightarrow H^\bullet(C_\oplus^\bullet)$ est un isomorphisme.

Pour tout ouvert $U \subset X$, $\mathcal{M}|U \rightarrow \mathcal{I}^\bullet|U$ est une résolution flasque de $\mathcal{M}|U$, donc on a

$$H^\bullet(U, \mathcal{M}|U) = H^\bullet(\mathcal{I}^\bullet(U)).$$

Si on définit le préfaisceau \mathcal{H}^\bullet comme étant la cohomologie dans Mod_X^- du complexe \mathcal{I}^\bullet , de sorte que $\mathcal{H}^q(U) = H^q(\mathcal{I}^\bullet(U)) = H^q(U, \mathcal{M}|U)$, on a donc

$$H_h^{pq}(C) = H^q\left(\prod_{|\sigma|=p} \mathcal{I}^\bullet(\mathfrak{U}_\sigma)\right) = \prod_{|\sigma|=p} H^q(\mathcal{I}^\bullet(\mathfrak{U}_\sigma)) = \prod_{|\sigma|=p} H^q(\mathfrak{U}_\sigma, \mathcal{M}|_{\mathfrak{U}_\sigma}) = C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{H}^q), \quad (2)$$

et en particulier $H_h^{00}(C) = C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ car $\mathcal{H}^0 = \mathcal{M}$. On a d'autre part $H_v^{0\bullet}(C) = \mathcal{I}^\bullet(X)$ car $\Gamma(X, ?)$ est exact à gauche. En composant j_h^\bullet avec $(j_v^\bullet)^{-1}$, on obtient donc un morphisme canonique

$$H^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) \rightarrow H^\bullet(X, \mathcal{M}).$$

On prétend que ce morphisme n'est autre que le morphisme $\omega_{\mathfrak{U}, \mathcal{M}}^\bullet$ défini directement en 2.11. Pour le voir, on remarque que le morphisme $\mathcal{I}^\bullet \rightarrow \mathcal{C}_\oplus^\bullet$ induit un isomorphisme en cohomologie, car les colonnes $\mathcal{C}^{\bullet q}$ sont acycliques (2.4). Ainsi, le complexe $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}_\oplus^\bullet$ obtenu de la résolution $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$ en composant avec ce morphisme est une résolution de \mathcal{M} , et on en déduit avec les résultats de 1.2 un \mathcal{M} -morphisme $\mathcal{C}_\oplus^\bullet \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$. Toutes les flèches dans le diagramme

$$\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{C}_\oplus^\bullet \xleftarrow{\sim} \mathcal{I}^\bullet$$

sont alors des \mathcal{M} -morphisms. Par définition, $\omega_{\mathfrak{U}, \mathcal{M}}^\bullet$ est le morphisme induit en cohomologie par la composition $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) \rightarrow C_\oplus^\bullet \rightarrow \mathcal{I}^\bullet(X)$. Comme tout \mathcal{M} -morphisme $\mathcal{I}^\bullet \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$ est homotope à l'identité, $C_\oplus^\bullet \rightarrow \mathcal{I}^\bullet(X)$ induit $(j_v^\bullet)^{-1}$ en cohomologie, ce qui prouve notre assertion.

Puisque j_h^0 est un isomorphisme, $\omega_{\mathfrak{U}, \mathcal{M}}^0$ est un isomorphisme. Si $n \geq 1$, pour que $\omega_{\mathfrak{U}, \mathcal{M}}^n$ soit un isomorphisme, il suffit qu'on ait $H^{n-q-1}(H_h^q(C)) = 0$ pour $1 \leq q \leq n-1$ et $H^{n-q}(H_h^q(C)) = 0$ pour $1 \leq q \leq n$ (1.9). On dira que \mathcal{M} est *acyclique pour* \mathfrak{U} si pour tout simplexe σ de \mathfrak{U} , le complexe $C^\bullet(\mathfrak{U}_\sigma, \mathcal{M}|_{\mathfrak{U}_\sigma})$ est acyclique. Si \mathcal{M} est acyclique pour \mathfrak{U} , on a $H_h^{pq}(C) = 0$ pour tout $q \geq 1$ en vertu de (2). Ceci démontre le théorème suivant.

Théorème. *Soient X un espace annelé, \mathfrak{U} un recouvrement ouvert de X et \mathcal{M} un X -module. Si \mathcal{M} est acyclique pour \mathfrak{U} , le morphisme canonique $\omega_{\mathfrak{U}, \mathcal{M}}^\bullet : H^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) \rightarrow H^\bullet(X, \mathcal{M})$ est un isomorphisme.*

2.13 Soient X un espace annelé et \mathcal{M} un X -module. On va maintenant comparer la cohomologie de X à coefficients dans \mathcal{M} avec le cohomologie de Čech de X à coefficients dans \mathcal{M} . Puisque les morphismes $\omega_{\mathfrak{U}, \mathcal{M}}^\bullet$ de 2.11 sont naturels en \mathfrak{U} , si $\lambda : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}$ est un raffinement, le triangle

$$\begin{array}{ccc} H^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) & \xrightarrow{H^\bullet(\lambda, \mathcal{M})} & H^\bullet(\mathfrak{V}, \mathcal{M}) \\ \omega_{\mathfrak{U}, \mathcal{M}}^\bullet \searrow & & \swarrow \omega_{\mathfrak{V}, \mathcal{M}}^\bullet \\ & H^\bullet(X, \mathcal{M}) & \end{array}$$

est commutatif. Lorsque l'on passe à la limite inductive sur \mathbf{Cov}_X , les $\omega_{\mathfrak{U}, \mathcal{M}}^\bullet$ induisent donc un morphisme naturel $\omega_{\mathcal{M}}^\bullet: \check{H}^\bullet(X, \mathcal{M}) \rightarrow H^\bullet(X, \mathcal{M})$. Si $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$ est une résolution injective de \mathcal{M} , on peut aussi prendre la limite inductive sur \mathbf{R}_X du complexe $C^{\bullet\bullet}$ de 2.12, et on obtient un double complexe $\check{C}^{\bullet\bullet} = (\check{C}^p(X, \mathcal{I}^q))_{p, q \in \mathbf{N}}$. Par exactitude du foncteur limite inductive (2.10), les complexes $\check{C}^{\bullet q}$ sont acycliques et on a $H_h^{0n}(\check{C}) = \check{C}^\bullet(X, \mathcal{M})$ et $H_v^{0n}(\check{C}) = \mathcal{I}^\bullet(X)$. Il est clair que le morphisme $\omega_{\mathcal{M}}^\bullet$ s'obtient alors comme le composé $(j_v^\bullet)^{-1} j_h^\bullet$. Sachant que $\check{C}^\bullet(X, ?)$ est un foncteur exact dans la catégorie des préfaisceaux, on a

$$H_h^{pq}(\check{C}) = H^q(\check{C}^p(X, \mathcal{I}^\bullet)) = \check{C}^p(X, \mathcal{H}^q), \quad (3)$$

où \mathcal{H}^\bullet est la cohomologie dans $\mathbf{Mod}_{\bar{X}}$ du complexe \mathcal{I}^\bullet .

2.14 Théorème. *Soient X un espace annelé, \mathcal{M} un X -module et \mathfrak{B} une base de la topologie de X telle que l'intersection de deux éléments de \mathfrak{B} soit encore un élément de \mathfrak{B} . Supposons que pour tout $U \in \mathfrak{B}$ et tout $n \geq 1$, $\check{H}^n(U, \mathcal{M}|U) = 0$. Alors le morphisme canonique $\omega_{\mathcal{M}}^\bullet: \check{H}^\bullet(X, \mathcal{M}) \rightarrow H^\bullet(X, \mathcal{M})$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On a déjà remarqué que $\omega_{\mathcal{M}}^0$ est un isomorphisme. Soit $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} \cup \{X\}$. On va montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $\omega_{\mathcal{M}|V}^n$ est un isomorphisme pour tout $V \in \mathfrak{B}'$, ce qui donnera en particulier le résultat cherché pour $V = X$. Supposons ceci démontré pour tout $m < n$, $m \geq 1$. Fixons $V \in \mathfrak{B}'$ et choisissons une résolution injective $\mathcal{M}|V \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$ de $\mathcal{M}|V$. On notera $\check{C}^{\bullet\bullet} = (\check{C}^p(V, \mathcal{I}^q))_{p, q \in \mathbf{N}}$ le double complexe défini comme en 2.13 et \mathcal{H}^\bullet la cohomologie dans $\mathbf{Mod}_{\bar{V}}$ du complexe \mathcal{I}^\bullet . Si $1 \leq m < n$ et $U \in \mathfrak{B}$, comme $\check{H}^m(U, \mathcal{M}|U) = 0$, on a $H^m(U, \mathcal{M}|U) = 0$ par hypothèse de récurrence. Par l'hypothèse sur la base \mathfrak{B} et (3), $H_h^m(\check{C}) = \check{C}^\bullet(V, \mathcal{H}^m)$ est en chaque degré limite inductive de produits de tels facteurs, donc $H_h^m(\check{C}) = 0$ pour $1 \leq m < n$. En vertu du critère énoncé en 1.9, le théorème sera démontré si l'on montre que $H_h^{0n}(\check{C}) = 0$. Or, le faisceau associé au préfaisceau \mathcal{H}^q est nul pour tout $q \geq 1$, car il n'est autre que la cohomologie du complexe acyclique \mathcal{I}^\bullet en degré q ; notre assertion découle donc du lemme suivant. \square

Lemme. *Soient X un espace annelé et \mathcal{M} un X -prémodule dont le X -module associé soit nul. Alors $\check{C}^0(X, \mathcal{M}) = 0$.*

Démonstration. Si $\alpha \in \check{C}^0(X, \mathcal{M})$ est représenté par un élément $\beta \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$, on peut trouver un raffinement $\lambda: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}$ de \mathbf{R}_X tel que $C^0(\lambda, \mathcal{M})(\beta) = 0$; donc $\alpha = 0$. \square

2.15 Soient X un espace annelé, \mathfrak{U} un recouvrement ouvert de X et \mathcal{M} et \mathcal{N} des X -modules. On va définir un morphisme de $\mathcal{O}(X)$ -modules

$$H^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}(X)} H^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{N}) \rightarrow H^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}),$$

naturel en \mathfrak{U} , \mathcal{M} et \mathcal{N} , rendant commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} H^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}(X)} H^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{N}) & \longrightarrow & H^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}) \\ \omega_{\mathfrak{U}, \mathcal{M}} \otimes \omega_{\mathfrak{U}, \mathcal{N}} \downarrow & & \downarrow \omega_{\mathfrak{U}, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}} \\ H^\bullet(X, \mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}(X)} H^\bullet(X, \mathcal{N}) & \longrightarrow & H^\bullet(X, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}), \end{array}$$

où la flèche inférieure est celle définie en 1.11. Ce morphisme est induit par les morphismes

$$\mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{C}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{C}^{p+q}(\mathfrak{U}, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}) \quad (4)$$

associés aux morphismes de préfaisceaux qui appliquent un élément $\alpha \otimes \beta \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{M})(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{C}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{N})(U)$ sur l'élément dont la composante $i_0 \dots i_{p+q}$ est l'image canonique de

$$(\alpha_{i_0 \dots i_p} | U \cap \mathfrak{U}_{i_0 \dots i_{p+q}}) \otimes (\beta_{i_p \dots i_{p+q}} | U \cap \mathfrak{U}_{i_0 \dots i_{p+q}})$$

dans $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})(U \cap \mathfrak{U}_{i_0 \dots i_{p+q}})$. La naturalité de cette construction est apparente, de même que le fait que ce morphisme est un $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})$ -morphisme. La commutativité du carré ci-dessus

n'est donc qu'un cas particulier de 1.13 lorsque l'on y pose $\mathcal{P} = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$, $\mathcal{M}^\bullet = \mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$, $\mathcal{N}^\bullet = \mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{N})$, et $\mathcal{P}^\bullet = \mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})$. Si l'on travaille avec les cochaînes alternées (2.8), on notera que le morphisme (4) se restreint en un morphisme $\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})$.

Tous les résultats de 1.11 et 1.12 se traduisent mot pour mot en remplaçant la cohomologie de l'espace par celle du recouvrement, et la commutativité des carrés ci-dessus montre que les structures que l'on définit sur ces modules de cohomologie sont compatibles. Par exemple, si \mathcal{L} est un X -module inversible, alors le morphisme $H(\mathfrak{U}, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes m}) \rightarrow H(X, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes m})$ somme des morphismes $\omega_{\mathfrak{U}, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes m}}^n$ est un morphisme d'anneaux bigradués lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$ et est un morphisme de modules bigradués en général.

Finalement, on a bien sûr des résultats analogues pour la cohomologie de Čech en passant à la limite inductive, mais nous ne les utiliserons pas.

§3 Cohomologie des schémas affines et des espaces projectifs

3.1 Théorème. *Soient X un schéma affine et \mathcal{M} un X -module quasi-cohérent. Alors pour tout $n \geq 1$, $H^n(X, \mathcal{M}) = 0$.*

Démonstration. Puisque les ouverts spéciaux de X forment une base de la topologie de X satisfaisant aux hypothèses du théorème 2.14 et que X lui-même est un ouvert spécial, il suffit de montrer que $\check{H}^n(U, \mathcal{M}|_U) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et tout ouvert spécial U de X . Puisque qu'un tel U est quasi-compact, il existe des recouvrements ouverts de U par un nombre fini d'ouverts spéciaux aussi fins que l'on veut, donc le résultat sera démontré si l'on prouve que $H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{M}|_U) = 0$ pour tout recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_{a_1}, \dots, U_{a_r})$ de U . Si $M = \mathcal{M}(U)$, $C = \mathcal{O}_X(U)$, et $B = \prod_{i=1}^r C_{a_i}$, sachant que U est affine et que $\mathcal{M}|_U$ est quasi-cohérent, le complexe $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{M}|_U)$ s'identifie, après augmentation, au complexe du lemme I 1.12. Notre assertion est donc un cas particulier de ce lemme. \square

Corollaire. *Soient X un schéma séparé au-dessus d'un schéma affine, \mathfrak{U} un recouvrement de X par des ouverts affines et \mathcal{M} un X -module quasi-cohérent. Alors les morphismes canoniques $\omega_{\mathfrak{U}, \mathcal{M}}^\bullet$ et $\omega_{\mathcal{M}}^\bullet$ sont des isomorphismes de $\mathcal{O}(X)$ -modules.*

Démonstration. En effet, \mathcal{M} est acyclique pour \mathfrak{U} en vertu de I 2.17 et du théorème. Le corollaire résulte donc du théorème 2.12. \square

3.2 Proposition. *Soit X un schéma. La catégorie Qcoh_X est dense dans la catégorie abélienne Mod_X .*

Démonstration. Il s'agit de montrer que pour toute suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow 0$$

dans Mod_X , si \mathcal{M} et \mathcal{P} sont quasi-cohérents, alors \mathcal{N} est quasi-cohérent. Supposons dans un premier temps X affine. Puisque $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$ par le théorème 3.1, la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{N}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X) \rightarrow 0$$

est à nouveau exacte. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{M}(X)^\sim & \rightarrow & \mathcal{N}(X)^\sim & \rightarrow & \mathcal{P}(X)^\sim \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \varepsilon_{\mathcal{M}} & & \downarrow \varepsilon_{\mathcal{N}} & & \downarrow \varepsilon_{\mathcal{P}} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{P} \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes par exactitude du foncteur $\tilde{}$ (I 2.4), et on déduit du théorème I 2.8 que \mathcal{N} est quasi-cohérent. En général, on se ramène au cas précédent en considérant pour $U \subset X$ un ouvert affine la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{M}|_U \rightarrow \mathcal{N}|_U \rightarrow \mathcal{P}|_U \rightarrow 0$ et en se rappelant que $\mathcal{M}|_U$ et $\mathcal{P}|_U$ sont quasi-cohérents. \square

3.3 Soient A un anneau, $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_r)$ une suite d'éléments de A et M un A -module. On note $M = C^{-1}(\mathbf{f}, M) \rightarrow C^*(\mathbf{f}, M)$ le complexe augmenté de A -modules

$$M \rightarrow \prod_i M_{f_i} \rightarrow \prod_{i < j} M_{f_i f_j} \rightarrow \prod_{i < j < k} M_{f_i f_j f_k} \rightarrow \dots \rightarrow M_{f_0 \dots f_r} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

dont la différentielle est donnée par

$$(d\alpha)_{i_0 \dots i_n} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_n}$$

avec un abus de notation évident. La cohomologie de ce complexe sera notée $H^*(\mathbf{f}, M)$. On peut encore décrire ce complexe directement comme suit. Pour $f \in A$, soit $K^*(f, M)$ le complexe de A -modules $M \rightarrow M$, nul en degrés différents de 0 et de 1, dont la différentielle est la multiplication par f . On note $K^*(\mathbf{f}, M)$ le complexe $K^*(f_0, M) \otimes_A \dots \otimes_A K^*(f_r, M)$. On remarque alors que le complexe $C^{\cdot-1}(f, M)$, $M \rightarrow M_f$, est la limite inductive du diagramme $K^*(f, M) \rightarrow K^*(f^2, M) \rightarrow K^*(f^3, M) \rightarrow \dots$. D'autre part, le complexe $C^{\cdot-1}(\mathbf{f}, M)$ s'identifie au complexe $C^{\cdot-1}(f_0, M) \otimes_A \dots \otimes_A C^{\cdot-1}(f_r, M)$. Comme le produit tensoriel commute aux limites inductives, $C^{\cdot-1}(\mathbf{f}, M)$ est la limite inductive du diagramme $K^*(\mathbf{f}, M) \rightarrow K^*(\mathbf{f}^2, M) \rightarrow K^*(\mathbf{f}^3, M) \rightarrow \dots$, où \mathbf{f}^n désigne bien sûr la suite (f_0^n, \dots, f_r^n) .

On dit que la suite \mathbf{f} est *régulière pour M* si la multiplication par f_i dans $M/M_{i-1}(\mathbf{f})$ est injective pour tout i , où $M_{i-1}(\mathbf{f})$ désigne le sous-module $f_0 M + \dots + f_{i-1} M$ de M .

3.4 Proposition. Soient A un anneau, $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_r)$ une suite d'éléments de A et M un A -module plat. Si \mathbf{f} est régulière pour M et si $n \in \mathbf{Z}$ est différent de 0 et r , alors $H^n(\mathbf{f}, M) = 0$.

Démonstration. Si \mathbf{f} est régulière pour M , chaque suite \mathbf{f}^n est aussi régulière pour M . Compte tenu de la discussion qui précède et du fait que la cohomologie commute aux limites inductives filtrantes, il suffit de montrer que $H^n(K^*(\mathbf{f}, M)) = 0$ si $n \neq r+1$. On montre par induction sur r que $H^n(K^*(\mathbf{f}, M)) = 0$ si $n \neq r+1$ et $H^{r+1}(K^*(\mathbf{f}, M)) \cong M/M_r(\mathbf{f})$, le cas $r=0$ étant trivialement vérifié sans aucune hypothèse sur \mathbf{f} .

Soient L^\bullet et K^\bullet des complexes de cochaînes de A -modules, et supposons que $K^n = 0$ si $n \neq 0, 1$ et que K^0 et K^1 soient plats. Soient K_0^\bullet et K_1^\bullet les complexes de A -modules partout nuls à l'exception de $K_0^0 = K^0$ et $K_1^1 = K^1$. On a alors une suite exacte (scindée en chaque degré)

$$0 \rightarrow L^\bullet \otimes_A K_1^\bullet \rightarrow L^\bullet \otimes_A K^\bullet \rightarrow L^\bullet \otimes_A K_0^\bullet \rightarrow 0.$$

Par platitude, $H^*(L^\bullet \otimes_A K_1^\bullet) = H^{\cdot-1}(L^\bullet \otimes_A K^1) = H^{\cdot-1}(L^\bullet) \otimes_A K^1$ et $H^*(L^\bullet \otimes_A K_0^\bullet) = H^*(L^\bullet \otimes_A K^0) = H^*(L^\bullet) \otimes_A K^0$, donc on obtient une longue suite exacte de la forme

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(L^\bullet \otimes_A K^\bullet) \rightarrow H^0(L^\bullet) \otimes_A K^0 \rightarrow H^0(L^\bullet) \otimes_A K^1 \rightarrow H^1(L^\bullet \otimes_A K^\bullet) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H^{n-1}(L^\bullet) \otimes_A K^1 \rightarrow H^n(L^\bullet \otimes_A K^\bullet) \rightarrow H^n(L^\bullet) \otimes_A K^0 \rightarrow H^n(L^\bullet) \otimes_A K^1 \rightarrow \dots \end{aligned}$$

En examinant le diagramme

$$\begin{array}{c} (L^{n-1} \otimes_A K^1) \oplus (L^n \otimes_A K^0) \twoheadrightarrow L^n \otimes_A K^0 \\ \downarrow \\ L^n \otimes_A K^1 \twoheadrightarrow (L^n \otimes_A K^1) \oplus (L^{n+1} \otimes_A K^0) \end{array}$$

on voit immédiatement que le morphisme connectant $H^n(L^\bullet) \otimes_A K^0 \rightarrow H^n(L^\bullet) \otimes_A K^1$ n'est autre que $(-1)^n(\text{id} \otimes d^0)$.

Appliquons ce qui précède à $L^\bullet = K^\bullet((f_0, \dots, f_{r-1}), M)$ et $K^\bullet = K^\bullet(f_r, M)$. Alors on obtient de l'hypothèse de récurrence que $H^n(K^*(\mathbf{f}, M)) = 0$ si $n \neq r, r+1$ ainsi qu'une suite exacte

$$0 \rightarrow H^r(K^*(\mathbf{f}, M)) \rightarrow M/M_{r-1}(\mathbf{f}) \otimes_A M \xrightarrow{\text{id} \otimes d^0} M/M_{r-1}(\mathbf{f}) \otimes_A M \rightarrow H^{r+1}(K^*(\mathbf{f}, M)) \rightarrow 0,$$

$d^0: M \rightarrow M$ étant ici la multiplication par f_r . Par régularité de \mathbf{f} , la flèche centrale est injective et donc $H^r(K^*(\mathbf{f}, M)) = 0$. D'autre part, son conoyau $H^{r+1}(K^*(\mathbf{f}, M))$ est visiblement isomorphe à $M/M_r(\mathbf{f})$. \square

Lorsque la suite \mathbf{f} engendre l'idéal unité de A , cette proposition est un cas particulier du lemme I 1.12, qui est valable sans les hypothèses de régularité et de platitude. En effet, si \mathfrak{U} désigne le recouvrement $(D(f_0), \dots, D(f_r))$ de $\text{Spec } A$, le complexe $C^*(\mathbf{f}, M)$ s'identifie à $C^{**}(\mathfrak{U}, M)$; mais les complexes $C^{**}(\mathfrak{U}, M)$ et $C^*(\mathfrak{U}, M)$ sont homotopes par la proposition 2.8, et le lemme cité montre que le second est acyclique. Cependant, lorsqu'on appliquera cette proposition au calcul de la cohomologie de certains espaces projectifs, la suite \mathbf{f} n'aura pas cette propriété, d'où la nécessité d'établir ce résultat sous ces hypothèses différentes.

3.5 Soient S un anneau gradué finiment engendré par S_1 en tant que S_0 -algèbre, $X = \text{Proj } S$ et \mathcal{M} un X -module quasi-cohérent. Par la proposition I 3.14, on peut supposer sans perte de généralité que \mathcal{M} est de la forme \tilde{M} pour un certain S -module gradué M . Pour tout $m \in \mathbf{Z}$, on identifiera aussi $\mathcal{M}(m)$ et $M(m) \sim$ grâce à l'isomorphisme canonique de I 3.11. Rappelons que

$$H(X, \mathcal{M}(*)) = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} H^n(X, \mathcal{M}(m))$$

est muni d'une structure d'anneau bigradué (non commutatif) lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$ qui étend la structure d'anneau gradué de $\Gamma_*(\mathcal{O}_X) = H^0(X, \mathcal{O}_X(*))$, et est un $H(X, \mathcal{O}_X(*))$ -module à gauche bigradué en général (1.12). Le morphisme d'anneaux gradués $\eta_S: S \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ munit chaque $H^n(X, \mathcal{M}(*))$ d'une structure de S -module gradué qu'on se propose d'étudier.

Choisissons une fois pour toutes une famille finie $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_r)$ d'éléments homogènes de S_+ qui engendrent S en tant que S_0 -algèbre. On sait (I 3.3) que $\mathfrak{U} = (D_+(f_i))_{0 \leq i \leq r}$ est un recouvrement de X par des ouverts affines. Si $\sigma = i_0 \dots i_k$ est un k -simplexe de \mathfrak{U} , on notera f_σ le produit $f_{i_0} \dots f_{i_k}$, de sorte que $\mathfrak{U}_\sigma = D_+(f_\sigma)$. Tous les ouverts \mathfrak{U}_σ sont donc affines, et par les théorèmes 3.1 et 2.12 le morphisme canonique naturel $\omega_{\mathfrak{U}, \mathcal{M}}: H^*(\mathfrak{U}, \mathcal{M}) \rightarrow H^*(X, \mathcal{M})$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}(X)$ -modules.

3.6 Reprenons les notations et les hypothèses de 3.5. On va maintenant expliciter la structure de S -module gradué de $H^n(X, \mathcal{M}(*))$. Le morphisme canonique de passage au faisceau associé identifie le faisceau $\mathcal{M}(m)$ sur la base des ouverts de la forme $D_+(f)$, $f \in S_+$ homogène, au préfaisceau $U \mapsto (S_+(U)^{-1}M(m))_0$ (corollaire I 3.4). Le $\mathcal{O}_X(\mathfrak{U}_\sigma)$ -module $\mathcal{M}(m)(\mathfrak{U}_\sigma)$ s'identifie donc au $(S_{f_\sigma})_0$ -module $(M_{f_\sigma})_m$, et les morphismes de restriction sont les morphismes canoniques $(M_{f_\sigma})_m \rightarrow (M_{f_\tau})_m$. Le complexe $C^{**}(\mathfrak{U}, \mathcal{M}(m))$ des cochaînes alternées de \mathfrak{U} à coefficients dans $\mathcal{M}(m)$ est donc isomorphe au complexe

$$\prod_i (M_{f_i})_m \rightarrow \prod_{i < j} (M_{f_{ij}})_m \rightarrow \dots \rightarrow (M_{f_0 \dots f_r})_m \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

dans lequel les σ varient parmi les simplexes strictement croissants de \mathfrak{U} (2.8). En prenant la somme directe de ce complexe sur les $m \in \mathbf{Z}$, les produits y figurant étant finis, on obtient le complexe

$$\prod_i M_{f_i} \rightarrow \prod_{i < j} M_{f_{ij}} \rightarrow \dots \rightarrow M_{f_0 \dots f_r} \rightarrow 0 \rightarrow \dots \quad (1)$$

qui n'est autre que $C^*(\mathbf{f}, M)$ (3.3). Comme le passage à la cohomologie commute aux sommes directes de complexes de cochaînes, la cohomologie $H^*(\mathbf{f}, M)$ s'identifie à $H^*(\mathfrak{U}, \mathcal{M}(*))$. On notera en particulier que $H^n(X, \mathcal{M}(*)) = 0$ si $n \geq r + 1$. On prétend en outre que la structure de S -module gradué de $H^n(\mathbf{f}, M)$ correspond à la structure de $H^0(X, \mathcal{O}_X(*))$ -module gradué de $H^n(X, \mathcal{M}(*))$ par le morphisme canonique $\eta_S: S \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(*))$, c'est-à-dire que les graduations considérées sont les mêmes, ce qui est évident, et que le contour du diagramme de

S_0 -modules

$$\begin{array}{ccc}
S \otimes_{S_0} H^n(\mathbf{f}, M) & \longrightarrow & H^n(\mathbf{f}, M) \\
\downarrow & & \downarrow \wr \\
H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X(*)) \otimes_{\mathcal{O}(X)} H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{M}(*)) & \longrightarrow & H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{M}(*)) \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
H^0(X, \mathcal{O}_X(*)) \otimes_{\mathcal{O}(X)} H^n(X, \mathcal{M}(*)) & \longrightarrow & H^n(X, \mathcal{M}(*))
\end{array}$$

est commutatif, où la flèche $S \rightarrow H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X(*))$ est la composition $(\omega_{\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X(*)}^0)^{-1} \eta_S$. On a déjà montré (2.15) que le rectangle inférieur commute. L'isomorphisme $(\omega_{\mathfrak{U}, \mathcal{M}}^0)^{-1}: \mathcal{M}(X) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ se déduit de l'augmentation $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ et est donc donné par $\alpha \mapsto (\alpha|_{\mathfrak{U}_i})_{0 \leq i \leq r}$. Sous l'identification de $\mathcal{O}_X(m)(\mathfrak{U}_\sigma)$ avec $(S_{f_\sigma})_m$, le composé $S_m \rightarrow \mathcal{O}_X(m)(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(m)(\mathfrak{U}_\sigma)$ n'est autre que le morphisme canonique $S_n \rightarrow (S_{f_\sigma})_n$ par définition de η_S , et il s'ensuit que la flèche $S \rightarrow H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X(*))$ envoie un élément $a \in S$ sur l'élément dont la i -ième composante est $a/1 \in S_{f_i}$. La ligne médiane est induite par les compositions

$$C'^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X(m)) \otimes_{\mathcal{O}(X)} C'^n(\mathfrak{U}, \mathcal{M}(m')) \rightarrow C'^n(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X(m) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}(m')) \xrightarrow{\sim} C'^n(\mathfrak{U}, \mathcal{M}(m+m'))$$

dont la première flèche envoie $\alpha \otimes \beta$ sur la cochaîne γ dont la composante $i_0 \dots i_n$ est $(\alpha_{i_0}|_{\mathfrak{U}_{i_0 \dots i_n}}) \otimes \beta_{i_0 \dots i_n} \in (\mathcal{O}_X(m) \otimes \mathcal{M}(m'))(\mathfrak{U}_{i_0 \dots i_n})$, qui est envoyée par la deuxième flèche sur le produit $(\alpha_{i_0}|_{\mathfrak{U}_{i_0 \dots i_n}}) \beta_{i_0 \dots i_n} \in \mathcal{M}(m+m')(\mathfrak{U}_{i_0 \dots i_n})$, par définition de la flèche canonique $\mathcal{O}_X(m) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}(m') \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(m+m')$ sur les ouverts de la forme $D_+(f)$ (I 3.9 et I 3.11), d'où, avec la description de la flèche $S \rightarrow H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X(*))$, la commutativité du rectangle supérieur.

3.7 Appliquons les résultats de 3.6 au cas particulier où $S = A[x_0, \dots, x_r]$ est un anneau de polynômes et $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$, A étant un anneau quelconque et $r \geq 1$. Le morphisme d'anneaux gradués $\eta_S: S \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ est alors un isomorphisme (I 3.15). On prendra bien sûr pour \mathbf{f} la famille $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_r)$ qui est régulière pour S . Par la proposition 3.4, on a donc $H^n(X, \mathcal{O}_X(*)) = 0$ si n est différent de 0 et r . Le théorème suivant détermine $H^n(X, \mathcal{O}_X(*))$ dans les deux cas restants.

Théorème. *Soient A un anneau, $r \geq 1$, $S = A[x_0, \dots, x_r]$ et $X = \text{Proj } S$. Si $n \neq 0, r$, alors $H^n(X, \mathcal{O}_X(*)) = 0$. Pour tout $m \in \mathbf{Z}$, $H^r(X, \mathcal{O}_X(-m-r-1))$ est un A -module libre de rang $\binom{m+r}{r}$ et le morphisme canonique*

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(m)) \otimes_A H^r(X, \mathcal{O}_X(-m-r-1)) \rightarrow H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \quad (2)$$

induit un isomorphisme entre $H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$ et le A -module dual à $H^r(X, \mathcal{O}_X(-m-r-1))$ et réciproquement.

Démonstration. Par 3.6, $H^r(X, \mathcal{O}_X(-m-r-1))$ est isomorphe au A -module des éléments homogènes de degré $-m-r-1$ dans le S -module gradué $H^r(\mathbf{x}, S)$. Ce dernier est le conoyau du morphisme

$$d^{r-1}: \prod_{k=0}^r S_{x_0 \dots \hat{x}_k \dots x_r} \rightarrow S_{x_0 \dots x_r}, \quad (a_k)_{0 \leq k \leq r} \mapsto \sum_{k=0}^r (-1)^k a_k,$$

où l'on identifie $S_{x_0 \dots \hat{x}_k \dots x_r}$ à un sous-module de $S_{x_0 \dots x_r}$. Or, $S_{x_0 \dots x_r}$ est un A -module libre avec base $\{x_0^{i_0} \dots x_r^{i_r} \mid i_k \in \mathbf{Z}\}$. Parmi ces monômes, ceux pour lesquels $i_k \geq 0$ engendrent le sous-module $S_{x_0 \dots \hat{x}_k \dots x_r}$. Ainsi, l'image de d^{r-1} est engendrée par les monômes $x_0^{i_0} \dots x_r^{i_r}$ avec $i_k \geq 0$ pour au moins un k . Son conoyau s'identifie donc au sous-module libre gradué de $S_{x_0 \dots x_r}$ engendré par les monômes $x_0^{i_0} \dots x_r^{i_r}$ avec $i_k < 0$ pour tout k , et il y a exactement $\binom{m+r}{r}$ tels monômes de degré $-m-r-1$.

En particulier, $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1))$ est un A -module libre de rang 1, un isomorphisme $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \xrightarrow{\sim} A$ étant donné en appliquant sur 1 l'image de $x_0^{-1} \dots x_r^{-1}$ par l'isomorphisme canonique $H^r(\mathbf{x}, S)_{-r-1} \xrightarrow{\sim} H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1))$. Par les résultats de 3.6, le morphisme (2) s'identifie à la composition $S_m \otimes_A H^r(\mathbf{x}, S)_{-m-r-1} \rightarrow C^r(\mathbf{x}, S)_{-r-1} \twoheadrightarrow H^r(\mathbf{x}, S)_{-r-1} \xrightarrow{\sim} A$ où la première flèche applique $x_0^{j_0} \dots x_r^{j_r} \otimes x_0^{i_0} \dots x_r^{i_r}$ sur $x_0^{i_0+j_0} \dots x_r^{i_r+j_r}$; mais tous ces monômes

sont dans l'image de d^{r-1} à moins que $i_0 + j_0 = \cdots = i_r + j_r = -1$. Ainsi, la matrice du morphisme bilinéaire (2) est la matrice identité dans les bases exhibées plus haut, convenablement ordonnées. \square

Remarquons pour conclure que, si l'on n'avait pas déjà prouvé que $H^n(X, \mathcal{O}_X(*)) = 0$ pour $n \neq 0, r$, on pourrait montrer comme dans la deuxième partie de la preuve que le morphisme canonique

$$H^n(X, \mathcal{O}_X(m)) \otimes_A H^{n-r}(X, \mathcal{O}_X(-m-r-1)) \rightarrow H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1))$$

induit un isomorphisme entre $H^n(X, \mathcal{O}_X(m))$ et le dual de $H^{r-n}(X, \mathcal{O}_X(-m-r-1))$ et réciproquement, pour $0 \leq n \leq r$. Ce phénomène est en fait plus général et est connu sous le nom de *dualité de Serre*. Sous sa forme la plus élémentaire, on peut l'exprimer comme suit. Si X est un schéma de dimension r suffisamment régulier (la condition précise est liée à la notion de régularité définie en 3.3), il existe un X -module \mathcal{Q} et un isomorphisme entre $H^n(X, \mathcal{M})$ et le dual de $H^{r-n}(X, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{Q})$, pour tout X -module localement libre \mathcal{M} . Lorsque $X = \text{Proj } A[x_0, \dots, x_r]$, le X -module \mathcal{Q} n'est autre que $\mathcal{O}_X(-r-1)$ et on retrouve le résultat démontré ci-dessus pour $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X(m)$.

Bibliographie

- [1] Henri Cartan. *Opérateurs d'homotopie*. Séminaire Henri Cartan, 1948–1949, http://www.numdam.org/item?id=SHC_1948-1949_1__A7_0.
- [2] M. Demazure et P. Gabriel. *Groupes Algébriques*. Masson et Cie, Paris, 1970.
- [3] Roger Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII, Paris, 1958.
- [4] Alexandre Grothendieck. *Éléments de Géométrie Algébrique I–IV*. Institut des Hautes Études Scientifiques, Paris, 1960–1967.
- [5] Robin Hartshorne. *Residues and Duality*. Springer, 1966.
- [6] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer Verlag, 1977.
- [7] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer Verlag, Second Edition, 2000.
- [8] U. Stambach P. J. Hilton. *A Course in Homological Algebra*. Springer Verlag, New York, 1970.
- [9] J.-P. Serre. Faisceaux algébriques cohérents. *The Annals of Mathematics, 2nd Series*, 61(2) :197–278, 1955.
- [10] B. R. Tennison. *Sheaf Theory*. Cambridge University Press, 1975.
- [11] I. R. Shafarevich V. I. Danilov, V. A. Iskovskikh. *Algebraic Geometry II*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer Verlag, 1991.
- [12] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge University Press, 1994.